verwendeter GTR: Casio CFX-9850G

Teil A Analysis

geg.: $y = f_t(x) = \dfrac{e^x}{8(t+x)^2} = \dfrac{1}{8}e^x(t+x)^{-2}$ $\left(x \in D_{f_t}; t \in R\right)$; $y = g(x) = \dfrac{1}{32}e^x$

a) - Definitionsbereich der Fktn f_t

Einschränkungen durch enthaltene elementare Fktn: **keine**

Einschränkungen durch Funktionsstruktur:

der Fktsterm enthält einen Quotienten, d.h. $f_t(x) = \dfrac{z_t(x)}{n_t(x)} \overset{\textit{definiert}}{\Leftrightarrow} n_t(x) \neq 0$

$n_t(x) \neq 0 \Leftrightarrow (t+x)^2 \neq 0 \Leftrightarrow t + x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -t$

$\boxed{D_{f_t}: \quad x \in R, x \neq -t; t \in R}$

- Nullstellen $\quad f_t(x_N) = 0 \Leftrightarrow z_t(x_N) \wedge n_t(x_N) \neq 0$

$z_t(x_N) = e^{x_N} = 0$ keine Lösung

$\boxed{f_t \text{ haben keine NSt.}}$

- Polstellen $\quad (n_t(x_P) = 0 \wedge z_t(x_P) \neq 0) \Rightarrow x_P$ ist Polst.

$n_t(x_P) = 0 \Leftrightarrow x_P = -t \wedge z_t(-t) = e^{-t} \neq 0$

$\boxed{\text{Polst. } x_P = -t}$

- Nachweis, dass gilt $T_t = P_{\min_t}\left(2 - t; \dfrac{e^2}{32e^t}\right)$

(A) Nachweis der notwendigen Bedingung $f_t'(x_E) = 0$

$$f_t'(x) = \frac{1}{8}\left(e^x(t+x)^{-2} + e^x\left(-2(t+x)^{-3} \cdot 1\right)\right) = \frac{1}{8}(t+x)^{-3}e^x(t+x-2)$$

$$f_t'(2-t) = \frac{1}{8}(t+2-t)^{-3}e^{2-t}\underbrace{(t+2-t-2)}_{=0} = 0 \Rightarrow x_E = 2 - t \text{ ist möglicher Extrempunkt}$$

(B) Nachweis der Existenz und Art mit Untersuchung des Vorzeichenwechsels in 1. Abl.

B1: $f_t'(x_k = 1 - t < x_E) = \dfrac{1}{8} \cdot (t+1-t) \cdot e^{1-t} \cdot (t+1-t-2) = \dfrac{1}{8} \cdot 1 \cdot \underbrace{e^{1-t}}_{>0} \cdot (-1) < 0:$

d.h. f_t vor x_E monoton fallend

B2: $f_t'(x_g = 3 - t > x_E) = \dfrac{1}{8} \cdot (t+3-t) \cdot e^{3-t} \cdot (t+3-t-2) = \dfrac{1}{8} \cdot 3 \cdot \underbrace{e^{3-t}}_{>0} \cdot 1 > 0$

d.h. f_t nach x_E monoton steigend

aus B1, B2 und A folgt, dass f_t bei x_E einen Tiefpunkt hat

(C) Nachweis der y-Koordinate des Extrempunktes

$$f_t(2-t) = \frac{e^{2-t}}{8(t+2-t)^2} = \frac{e^2 \cdot e^{-t}}{8 \cdot 2^2} = \frac{e^2}{32e^t}$$

aus A, B, C folgt die Behauptung

- Nachweis, dass genau ein t_y existiert, für das f_t keinen SP mit y-Achse besitzt

SP y-Achse: $\quad Y_N(0; y_N): \quad y_N = f_t(0)$

$y_N = \dfrac{e^0}{8(t+0)^2} = \dfrac{1}{8t^2} \Rightarrow y_N$ für $t_y = 0$ nicht definiert

$\boxed{\text{Die Fkt } f_0 \text{ besitzt keinen SP mit der y-Achse}}$

- Verhalten von f_t für $x \to -\infty$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{8(t+x)^2}=\text{"}\frac{0}{8(-\infty)^2}\text{"}=\text{"}\frac{0}{\infty}\text{"}=0}$$

- Nachweis, dass f_t für $x<-t$ monoton wachsend ist

$x_m<-t \Leftrightarrow x_m=-t-h;\quad h>0$

$$f_t'(x_m=-t-h)=\frac{1}{8}\cdot(t+(-t-h))\cdot e^{-t-h}\cdot(t+(-t-h)-2)=\frac{1}{8}\cdot\underbrace{(-h)}_{<0}\cdot\underbrace{e^{1-t}}_{>0}\cdot\underbrace{(-h-2)}_{<0}>0$$

$\boxed{f_t'(x_m)>0\Rightarrow f_t \text{ monoton steigend für alle } x_m}$

b) Aufstellung der Ortsfunktion der Tiefpunkte der Fktn f_t

es gilt: $x_T=2-t\Leftrightarrow t=2-x_T$

$$f(x_T(t))=\frac{e^{x_T}}{8(2-x_T+x_T)^2}=\frac{e^{x_T}}{32}=g(x)$$

Überprüfung, ob $P(2\ln 32+2;32e^2)\in g$

$$g(2\ln 32+2)=\frac{e^{\ln 32^2+2}}{32}=\frac{e^{\ln 32^2}\cdot e^2}{32}=\frac{32^2\cdot e^2}{32}=32e^2\Rightarrow P\in g$$

c) Extremwertproblem
Aufstellung der Zielfunktion
Extremgröße: Differenz der Funktionswerte der Funktionen $f_0;f_{-1}$

$$\boxed{d(c)=|f_0(c)-f_{-1}(c)|=\left|\frac{e^c}{8c^2}-\frac{e^c}{8(-1+c)^2}\right|=\left|\frac{e^c}{8}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{(c-1)^2}\right)\right|=z(c)\quad c\in R, c>1}$$

Berechnung der lokalen Extrempunkte der Zielfunktion mit GTR
$T_1(0{,}5;0)$ entfällt wegen Definitionsbereichsbeschränkung
$T_2(3{,}61;0{,}32)$
An der Stelle 3,61 haben die beiden Funktionen den minimalen Abstand von 0,32LE

d) Aufstellung der Tangentengleichung am Graph der Funktion f_{-1} im Punkt $B=P_{\min_{-1}}$

x-Koordinate des Berührungspkts: $x_B=2-(-1)=3$

y-Koordinate des Berührungspkts: $y_B=\dfrac{e^2}{32e^{-1}}=\dfrac{e^3}{32}$

Tangentenanstieg: $m_t=f_{-1}'(3)=0$

Pkt-Richtungsgl. der Tangente: $y-\dfrac{e^3}{32}=0(x-3)$

explizite Form der Tangentengl: $y=\dfrac{e^3}{32}$

Berechnung des Flächeninhaltes, der von den Graphen der Funktionen f_{-1},g,h und der y-Achse vollständig begrenzt wird
Skizze des Sachverhaltes
$A=A_1+A_2$
Die Flächeninhalte können mit Hilfe von bestimmten Integralen berechnet werden.
x_{S1} ... Schnittpkt von f_{-1} und h (nicht der Berührungspkt)
x_{S2} ... Schnittpkt von f_{-1} und g

$$A=A_1+A_2=\left|\int_0^{x_{S1}\overset{GTR}{=}0{,}443}(f_{-1}(x)-g(x))\right|+\left|\int_{x_{S1}\overset{GTR}{=}0{,}443}^{x_{S2}\overset{GTR}{=}3}(g(x)-h(x))\right|\overset{GTR}{=}1{,}14FE$$

e) Ermittlung der Geradengl. von s

$P_{\min_0}\left(2;\frac{e^2}{32}\right); P_{\min_{-1}}\left(3;\frac{e^3}{32}\right)$

Zwei-Pkte-Gl. der Geraden s: $y-\frac{e^2}{32}=\frac{\frac{e^3}{32}-\frac{e^2}{32}}{3-2}(x-2)$

Anstieg der Geraden s: $m_s \overset{GTR}{=} 0{,}397$ SSt. mit y-Achse: $n_s \overset{GTR}{=} -0{,}563$

Bestimmung der Koordinaten des Pkts Q mit $g'(x_Q)=m_s$ GTR: $x_Q=2{,}54 \overset{GTR}{\Rightarrow} y_Q=0{,}397$

Ermittlung des Abstandes von Q zu s: mit GTR: $a=0{,}045$

Teil B Geometrie / Algebra

geg.: $A(6;0;0), B_t(8;t^2;0), C_t(4;3t;0), D(2;2;0), S(5;3;6) \quad (t\in R, t>0)$

a) - Ermittlung Abstand $C_1(4;3;0)$ und E_{S1} mit $A, B_1(8;1;0), S \in E_{S1}$

Ebenengleichung mit GTR: $E_{S1}:\ 6x-12y+7z=36$

Abstand Pkt-Ebene mit GTR: $\boxed{a=3{,}17}$

- Ermittlung des Schnittwinkels der Ebenen E_{S1}, E_G

Ebenengleichung mit GTR: $E_G:\ z=0$

Schnittwinkel ist Winkel zwischen den Normalenvektoren der beiden Ebenen

Berechnung mit GTR: $\boxed{\alpha=\angle\left(\vec{n}_{E_{S1}};\vec{n}_{E_G}\right)=62{,}4°}$

b) Berechnung der Werte t für die gilt $\left|\overrightarrow{B_tS}\right|=23$

$\sqrt{(5-8)^2+\left(3-t^2\right)+(6-0)^2}=23$

$\sqrt{9+\left(3-t^2\right)+36}-23=0$

$t_1 \overset{GTR}{=} -5; t_2 \overset{GTR}{=} 5$

c) - Nachweis genau eines Wertes t_Q für den die Grundfläche ein Quadrat bildet

Seiten müssen senkrecht aufeinander stehen, d.h. es muss z.B. gelten $\overrightarrow{C_tD}\perp\overrightarrow{DA} \Leftrightarrow \overrightarrow{C_tD}*\overrightarrow{DA}=0$

$\overrightarrow{C_tD}=\begin{pmatrix}-2\\2-3t\\0\end{pmatrix}; \overrightarrow{DA}\begin{pmatrix}4\\-2\\0\end{pmatrix}: \overrightarrow{C_{t_Q}D}*\overrightarrow{DA}=-2\cdot 4+\left(2-3t_Q\right)(-2)+0=-8-4+3t=0 \Leftrightarrow t=2$

D.h. für $t_Q=2$ könnte ein Quadrat entstehen.

Da außerdem gilt $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{C_2B_2}=\begin{pmatrix}4\\-2\\0\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AB_2}=\overrightarrow{DC_2}=\begin{pmatrix}-2\\-4\\0\end{pmatrix}$, folgt die Behauptung.

- Berechnung des Volumens dieser Pyramide

$V_P=\frac{1}{3}A_G\cdot h \qquad A_G=\left|\overrightarrow{DA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB_2}\right|=\left(\sqrt{20}\right)^2=20; \quad h=z_S=6$

$V_P=\frac{1}{3}\cdot 20\cdot 6=40VE$

d) Ermittlung einer Gleichung einer Ebene,
- die parallel zur Grundfläche liegt
- für die die Schnittfläche mit der Pyramide 25% des Inhaltes der Grundfläche hat

Die Schnittfläche ist wieder ein Quadrat, d.h. für die Seitenlänge der Schnittfläche gilt:

$A_S=a_S^2=\frac{1}{4}A_G=\frac{1}{4}a_G^2 \Leftrightarrow a_S=\frac{1}{2}a_G$

Nach Strahlensatz muss dann diese Ebene auch die Höhe der Pyramide halbieren. Deshalb lautet die Gleichung der zur x-y-Ebene parallelen Ebene: $z = 3$

e) Berechnung desjenigen t, für welches die Ebene E_{Sc} (bestimmt durch $S, C_t, D \in E_{Sc}$) senktecht zur x-y-Ebene steht

d.h. der Normalenvektor von E_{Sc} muss senkrecht auf dem Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ stehen

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 = 0 \cdot x_n + 0 \cdot y_n + z_n \Leftrightarrow z_n = 0 \quad (1)$$

Gl. der Ebene E_{Sc} in Parameterform

$$E_{Sc}: \quad \vec{x} = \overrightarrow{OD} + s \cdot \overrightarrow{DS} + t \cdot \overrightarrow{DC_t} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 2-3t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Berechnung eines Normalenvektors $\vec{n}$
Da $\vec{n}$ auf beiden Richtungvektoren senktecht steht, muss gelten:

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = 0 = 3x_n + y_n + 6z_n \text{ mit (1)}: \quad 0 = 3x_n + y_n \Leftrightarrow y_n = -3x_n \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -2 \\ 2-3t \\ 0 \end{pmatrix} = 0 = -2x_n + (2-3t)y_n \text{ mit (2)}: \quad 0 = -2x_n + (2-3t)\cdot(-3x_n) = -2x_n - 6x_n + 9tx_n \quad (3)$$

$$\boxed{(3) \quad 0 = -8x_n + 9tx_n \Leftrightarrow 9tx_n = 8x_n \overset{x_n \neq 0}{\Leftrightarrow} t = \frac{8}{9}}$$

f) Berechnung aller Werte t für die gilt: $\cos \angle B_t AD = \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$$\overrightarrow{AB_t} * \overrightarrow{AD} = \left|\overrightarrow{AB_t}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AD}\right| \cdot \cos\alpha$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ t^2 \\ 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -8 + 2t^2 + 0 = \sqrt{4 + t^4 + 0} \cdot \sqrt{16 + 4 + 0} \cdot \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$0 = 2t^2 - 8 - \sqrt{4 + t^4} \cdot \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{17}}$$

$$t_1 \overset{GTR}{=} -3; t_2 \overset{GTR}{=} 3$$

Teil C Stochastik

a) $N_1 = \binom{2}{6}$ Anzahl der möglichen Auswahlen an Technikfragen

$N_2 = \binom{12-2}{30-12} = \binom{10}{24}$ Anzahl der möglichen Auswahlen an Verkehrsregelfragen

$N = N_1 \cdot N_2 \overset{GTR}{=} 29418840$

b) Ereignis TB ... Fahrschüler besteht die theoretische Prüfung
das Ereignis setzt sich aus den beiden disjukten Teilereignissen
TB_1 ... Fahrschüler besteht beim ersten Versuch

TB_2 ... Fahrschüler ist beim ersten Versuch durchgefallen schafft es aber beim 2. Anlauf

$P(TB) = P(TB_1) + P(TB_2) = 0{,}65 + (1 - 0{,}65) \cdot 0{,}8 = 0{,}93$

c) ZE1 Durchführung der ersten praktische Fahrprüfung eines Schülers
ZE1 ist BERNOULLI-Experiment mit den Ereignissen
PB_1 ... Fahrschüler besteht praktische Prüfung beim ersten Versuch
$\overline{PB_1}$ ... Fahrschüler besteht praktische Prüfung beim ersten Versuch nicht

Ermittlung der Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Fahrschüler (ohne dass bekannt ist, ob dieser Schüler einen oder zwei Versuche für die theoretische Prüfung benötigte) die praktische Prüfung im ersten Versuch besteht:

$P_{TB_1}(PB_1) = 0{,}9$ Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Fahrschüler die praktische Prüfung im 1. Versuch besteht unter der Voraussetzung, dass er die theoretische Prüfung im 1. Versuch bestanden hat

$P_{TB_2}(\overline{PB_1}) = 0{,}25$ Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Fahrschüler die praktische Prüfung im 1. Versuch nicht besteht unter der Voraussetzung, dass er die theoretische Prüfung im 2. Versuch bestanden hat

$P(PB_1) = P_{TB_1}(PB_1) \cdot P(TB_1) + P_{TB_2}(PB_1) \cdot P(TB_2) = 0{,}9 \cdot 0{,}65 + (1 - 0{,}25) \cdot (1 - 0{,}65) \cdot 0{,}8 = 0{,}795$

ZEn n-malige Durchführung der ersten praktische Fahrprüfung
ZEn ist BERNOULLI-Kette aus der n-maligen Wiederholung des ZE1. Die Zufallsgröße P ist dann binomialverteilt mit der Erfolgswahrscheinlichkeit $p = P(PB_1)$ und der Kettenlänge n

Ereignis C ... mindestens ein Schüler des Kurses schafft die praktische Prüfung im ersten Versuch

$P(C) = P(P > 0) \geq 0{,}99$

Da die Erfolgsanzahl bei Ereignis C bei unbekanntem n alle Werte von 1 bis n annehmen kann, kann die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses nicht direkt berechnet werden. Das Gegenereignis $\overline{C}$ (kein Schüler schafft es) hängt jedoch nur noch von n ab. Anzahl der Erfolge liegt mit 0 fest. Deshalb Übergang zum Gegenereignis:

$$P(\overline{C}) = P(P = 0) = \binom{0}{n} \cdot p^0 \cdot (1-p)^n = 1 \cdot 1 \cdot (1 - 0{,}795)^n = 0{,}205^n$$

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - 0{,}205^n \geq 0{,}99 \Leftrightarrow 0{,}01 \geq 0{,}205^n \Leftrightarrow \ln 0{,}01 \geq n \ln 0{,}205 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}205} \approx 2{,}9$$

Es sollten mindestens 3 Schüler im Lehrgang sein.
Gesucht ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_{PB_1}(TB_1)$

$$P_{PB_1}(TB_1) \cdot P(PB_1) = P_{TB_1}(PB_1) \cdot P(TB_1)$$

$$P_{PB_1}(TB_1) = \frac{P_{TB_1}(PB_1) \cdot P(TB_1)}{P(PB_1)} = \frac{0{,}9 \cdot 0{,}65}{0{,}795} \approx 0{,}7358$$

d) Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Fragebögen an die in einer Tagesproduktion in Ordnung sind. X ist binomialverteilt mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 1 - 0{,}04 = 0{,}96$ und der Durchführungszahl $n = 10000$.
Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses D mit

$$P(D) = P(X > 9580) = P(X \geq 9581) \overset{GTR}{=} 0{,}8339.$$

Da bei der Durchführungszahl 10000 mit der BERNOULLI-Formel nicht mehr gearbeitet werden kann, muss das Näherungsverfahren nach MOIVRE-LAPLACE angewendet werden.

e) Berechnung der Wahrscheinlichkeit dafür, dass X um mehr als 10 vom Erwartungswert abweicht
Ereignis E ... Zufallsgröße weicht um mehr als 10 von EW ab
Ereignis $\overline{E}$ ... Zufallsgröße weicht um höchstens 10 vom EW ab

$P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - P(\mu - 10 \leq X \leq \mu + 10)$

Berechnung des Erwartungswertes der Zufallsgröße X

$E(X) = p \cdot n = 9600 = \mu$

$$P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - P(9590 \leq X \leq 9610) \overset{GTR}{=} 1 - 0{,}3902 = 0{,}6098$$

Teil D1 Wahlaufgabe Analysis

geg.: $y = f_t(x) = t \sin(tx) + t \quad (x \in R, x > 0; t \in R, t > 0)$

a) - Nullstell

$$0 = t\sin(tx_N) + t \Leftrightarrow -1 = \sin(tx_N) \Leftrightarrow tx_N = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \Leftrightarrow x_N = \frac{1}{t}\left(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right) \quad (k \in Z, k \geq 0)$$

- Extrempunkte

(A) Extremstellen

$$f_t'(x) = t\cos(tx)\cdot t = t^2 \cdot \cos(tx)$$

$$f_t'(x_E) = 0 \Leftrightarrow \cos(tx_E) = 0 \Leftrightarrow tx_E = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x_E = \frac{1}{t}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \quad (k \in Z, k \geq 0)$$

(B) Nachweis und Art der Extrema

$$f_t''(x) = t^2(-\sin(tx))\cdot t = -t^3 \sin(tx)$$

$$f_t''(x_E) = -t^3 \sin\left(t\frac{1}{t}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\right) = -t^3 \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \begin{cases} k \text{ gerade}: f_t''(x_E) = -t^3 \cdot 1 < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt} \\ k \text{ ungerade}: f_t''(x_E) = -t^3 \cdot (-1) > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt} \end{cases}$$

(C) y-Koordinaten der Extrempunkte

$$f_t(x_E) = t\sin\left(t\frac{1}{t}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\right) + t = t\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) + t = \begin{cases} k \text{ gerade}: f_t(x_E) = t\cdot 1 + t = 2t \\ k \text{ ungerade}: f_t(x_E) = t\cdot(-1) + t = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{H_i\left(\frac{1}{t}\left(\frac{\pi}{2} + 2i\pi\right);2t\right); \quad T_i\left(\frac{1}{t}\left(\frac{\pi}{2} + (2i+1)\pi\right);0\right) \quad (i \in Z, i \geq 0)}$$

b) Berechnung der Fläche die vom Graphen der Funktion f_t und der x-Achse zwischen zwei benachbarten NSt. eingeschlossen wird.

$$A = \left|\int_{x_{Nk}}^{x_{Nk+1}} (t\sin(tx) + t)dx\right| = \left|\left[-\cos(tx) + tx\right]_{\frac{1}{t}\left(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right)}^{\frac{1}{t}\left(\frac{3}{2}\pi + 2(k+1)\pi\right)}\right| =$$

$$= -\left[\cos\left(t\frac{1}{t}\left(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right)\right) + t\frac{1}{t}\left(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right) - \left(\cos\left(t\frac{1}{t}\left(\frac{3}{2}\pi + 2(k+1)\pi\right)\right) + t\frac{1}{t}\left(\frac{3}{2}\pi + 2(k+1)\pi\right)\right)\right] =$$

$$= -\left[\underbrace{\cos\left(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right)}_{0} + \left(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right) - \left(\underbrace{\cos\left(\frac{3}{2}\pi + 2(k+1)\pi\right)}_{0} + \left(\frac{3}{2}\pi + 2(k+1)\pi\right)\right)\right] =$$

$$= -\left[\frac{3}{2}\pi + 2k\pi - \left(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi + 2\pi\right)\right] = 2\pi$$

c) Extremwertproblem

<u>Aufsuchen der Zielfkt</u>

Extremgröße: Abstand eines Pkts P vom Koordinatenursprung $\quad A = \sqrt{x^2 + y^2}$

Nebenbedingungen: P ist Wendepkt von f_t mit kleinstmöglicher x-Koordinate

1. $x = x_{W\min}$
2. $y = f_t(x_{W\min})$

Berechnung der kleistmöglichen Wendestelle

$$f_t''(x_W) = 0 \Leftrightarrow 0 = \sin(tx_W) \Leftrightarrow tx_W = k\pi \Leftrightarrow x_W = \frac{k\pi}{t} \Rightarrow x_{W\min} = \frac{\pi}{t}$$

Zielfunktion: $A = \sqrt{\left(\frac{\pi}{t}\right)^2 + \left(t\sin\left(t\frac{\pi}{t}\right) + t\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{t}\right)^2 + t^2} \quad (t \in R, t > 0)$

Berechnung der Extrempkte der Zielfkt mit GTR: $T(1{,}77;2{,}5)$

Der erste Wendepkt der Funktion $f_{1{,}77}$ hat den geringsten Abstand zum Koordinatenursprung.

d) $x_{Nk} = \frac{1}{t}\left(\frac{3}{2}\pi + 2(k-1)\pi\right) \quad k \in Z, k \geq 1$

ges. ist, ab welchem t die 8. NSt. kleiner als 2π ist

$$x_{N8} = \frac{1}{t}\left(\frac{3}{2}\pi + 2(8-1)\pi\right) \leq 2\pi \Leftrightarrow \frac{3}{4} + \frac{14}{2} \leq t \Leftrightarrow t \geq \frac{31}{4}$$

Teil D2 Wahlaufgabe Geometrie / Algebra

gegeben: $E_1: \; 2x - y + 2z = 1; \; E_2: \; 2x + 2y + z = 4; \; g: \; \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (r \in R)$

Gerade k_t durch die Pkte $O(0;0;0)$; $P_t(-1;-1;t)$

a) - Schnittgerade der beiden Ebenen

$$\begin{array}{rrrcr} 2x & -y & +2z & = & 1 \\ 2x & +2y & +z & = & 4 \\ \hline 0 & -3y & +z & = & -3 \end{array} \Rightarrow z = 3y - 3$$

$$2x - y + 2(3y-3) = 2x + 5y - 6 = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}y + \frac{7}{2}$$

Wählt man y als freien Parameter ergibt sich folgende Lösung:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} - \frac{5}{2}t \\ t \\ -3+3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} \frac{-5}{2} \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$ ist die Gleichung der Schnittgerade

- Berechnung des Schnittwinkels (Winkel zwischen den beiden Normalenvektoren)

$\vec{n_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \vec{n_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ Winkelberechnung mit GTR: $\angle(E_1;E_2) = 63{,}6°$

- Aufstellung der Geradengl für k_t

$$k_t: \quad \vec{x} = s\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ t \end{pmatrix}$$

Schnittpunkte der Geraden k_t und g

$$\left.\begin{array}{l} -s = 1 + r \\ -s = -2r \end{array}\right\} 0 = 1 + 3r \Leftrightarrow r = -\frac{1}{3} \Rightarrow s = \frac{2}{3}$$

$$st = -4 + r \text{ mit r,s}: \frac{2}{3}t = -4 - \frac{1}{3} \Leftrightarrow t = \frac{3}{2}\left(-\frac{12}{3} - \frac{1}{3}\right) = -\frac{13}{2}$$

b) Abstand eines beliebigen Punktes von der Ebene E_1

$d_1(E_1; P(x_p; y_p; z_p)): \quad d_1 = \frac{1}{\left|\vec{n}_{E_1}\right|}\left|2x_p - y_p + 2z_p - 1\right| \qquad \vec{n}_{E_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left|\vec{n}_{E_1}\right| = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$

$d_1 = \frac{1}{3}\left|2x_p - y_p + 2z_p - 1\right| \qquad \left(2x_p - y_p + 2z_p - 1 \overset{def.}{=} B_1\right)$

analoge für E_2 $\qquad d_2 = \frac{1}{3}\left|2_p + 2y_p + z_p - 4\right| \qquad \left(2_p + 2y_p + z_p - 4 \overset{def}{=} B_2\right)$

Die Menge aller Punkte, die von beiden Ebenen den gleichen Abstand haben, besteht aus zwei anderen (zueinander senkrechten) Ebenen. Die Gleichungen dieser beiden Ebenen erhält man, indem man $d_1 = d_2$ setzt und 4 denkbare Fälle unterscheidet, die sich auf 2 Fälle reduzieren lassen:

$$\left.\begin{array}{l} 1.1.\ B_1 < 0; B_2 < 0 \Rightarrow d_1 = \frac{1}{3}(-B_1) = \frac{1}{3}(-B_2) \Leftrightarrow B_1 = B_2 \\ 1.2.\ B_1 > 0; B_2 > 0 \Rightarrow d_1 = \frac{1}{3}B_1 = \frac{1}{3}B_2 \Leftrightarrow B_1 = B_2 \end{array}\right\} B_1 = B_2$$

$$B_1 = 2x_p - y_p + 2z_p - 1 = 2_p + 2y_p + z_p - 4 = B_2 \Rightarrow \boxed{E_{A1}:\ -3y_p + z_p = -3}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2.1.\ B_1 > 0; B_2 < 0 \Rightarrow d_1 = \frac{1}{3}B_1 = \frac{1}{3}(-B_2) \Leftrightarrow B_1 = -B_2 \\ 2.2.\ B_1 < 0; B_2 > 0 \Rightarrow d_1 = \frac{1}{3}(-B_1) = \frac{1}{3}B_2 \Leftrightarrow -B_1 = B_2 \end{array}\right\} B_1 = -B_2$$

$$B_1 = 2x_p - y_p + 2z_p - 1 = -2_p - 2y_p - z_p + 4 = -B_2 \Rightarrow \boxed{E_{A2}:\ 4x_p + y_p + 3z_p = 5}$$

Die gesuchten Punkte sind die Durchstoßpunkte der Gerade g durch diese beiden Ebenen:
DSP g, E_{A1} GTR: $P_1(1{,}14;-0{,}28;-3{,}85)$
DSP g, E_{A2} GTR: $P_2(3{,}6;-5{,}2;-1{,}4)$

c) Eckpunkte der Pyramide sind die Punkte $O(0;0;0)$; $X(2;0;0)$; $Y(0;2;0)$; $Z(0;0;4)$.
Die Geradenschar k_t spannt eine Ebene auf, die alle diejenigen Punkte enthält, bei denen x- und y-Koordinate gleich sind $(E_k:\ x - y = 0)$.
Zwei Punkte $P_1; \overline{P}_1$ seien Symmetriepartner und der Punkt M der Symmetriepunkt auf der Symmetrieebene, dann gilt:

$$\overrightarrow{P_1M} = \begin{pmatrix} x_1 - x_M \\ y_1 - y_M \\ z_1 - z_M \end{pmatrix} = \overrightarrow{M\overline{P}_1} = \begin{pmatrix} x_M - \overline{x}_1 \\ y_M - \overline{y}_1 \\ z_M - \overline{z}_1 \end{pmatrix} = r \cdot \vec{n}_{Ek} = r\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \underbrace{x_1 - x_M}_{(1)} = \underbrace{x_M - \overline{x}_1}_{(2)} = r \\ \underbrace{y_1 - y_M}_{(3)} = \underbrace{y_M - \overline{y}_1}_{(4)} = -r \end{array}\right\} (1)+(4): (x_1 \underbrace{- x_M) + (y_M}_{=0 \text{ weil } x_M = y_M} - \overline{y}_1) = r + (-r) \Rightarrow x_1 - \overline{y}_1 = 0 \Leftrightarrow \overline{y}_1 = x_1$$

analog mit $(2)+(3)$: $\overline{x}_1 = y_1$

$$z_1 - z_M = z_M - \overline{z}_1 = 0 \Rightarrow \overline{z}_1 = z_1 = z_M$$

Den Symmetriepartner $\overline{P}_1$ eines Punktes $P_1(x_1; y_1; z_1)$ mit der Ebene E_k als Symmetrieebene erhält man also durch Vertauschung von x- und y-Koordinate und Beibehaltung der z-Koordinate: $\overline{P}_1(y_1; x_1; z_1)$.
Wenn alle Eckpunkte eines geradlinig begrenzten, konvexen Körpers einen Eckpunkt dieses Körpers als Symmetriepartner besitzen, dann ist der Körper zu dieser Symmetrieebene symmetrisch.
$O(0;0;0)$: $O'(0;0;0)$ ist Eckpunkt der Pyramide
$Z(0;0;4)$: $Z'(0;0;4)$ ist Eckpunkt der Pyramide
$X(2;0;0)$: $X'(0;2;0) = Y$ ist Eckpunkt der Pyramide
$Y(2;0;0)$: $Y'(0;2;0) = X$ ist Eckpunkt der Pyramide
Damit ist die Behauptung bewiesen.

d) Alle Punkte, die in der Ebene liegen erfüllen die Ebenengleichung. Für alle Punkte, die im Inneren der Pyramide liegen muss dann gelten:
$2p_x + 2p_y + p_z < 4$.
Durch einsetzen der Koordinaten eines Punktes in die Ebenengleichung und Vergleich des Ergebnisses mit 4, kann die Entscheidung getroffen werden.