Lösungen schriftliches Abitur Sachsen
Mathematik Grundkurs 2002 Ersttermin

Teil A Analysis

gegeben $f(x)=\dfrac{20x}{(x^2+3)^2}\ (x\in D_f)$ und $F(x)=-\dfrac{10}{x^2+3}\ (x\in R)$

a) - Untersuchung des Definitionsbereiches

1. Beschränkungen des Def.-ber. durch enthaltene elementare Funktionen: $(20x;x^2;3;i^2)$
keine Beschränkungen
2. Beschränkungen des Def.-ber. durch Zusammensetzungsarten:
f (ist) enthält einen Quotienten $f(x)=\dfrac{z(x)}{n(x)}\overset{def.}{\Leftrightarrow}n(x)\neq 0$

$n(x)=(x^2+3)^2\neq 0\Leftrightarrow x^2+3\neq 0\Leftrightarrow x^2\neq -3$ gilt für alle $x\in R\Rightarrow$ keine Beschränkung

aus 1. und 2. folgt: $D_f: x\in R$

- Angabe Nullstellen $x_N=0$ ($f(x_N)=0$; Ablesen oder GTR)

Berechnung der NSt mit GTR
- Eingabe der Fkt f auf Position Y1 im GRAPH-Menü
- Anzeigen des Fktsgraphen durch drücken der EXE-Taste oder der F6-Taste (Draw)
- F5-Taste (G-Solve)
- F1-Taste (Root), die angezeigte Lösung ist die NSt von f

- Untersuchung der Symmetrie

$f(-x)=\dfrac{20(-x)}{((-x)^2+3)^2}=\dfrac{-20x}{(x^2+3)^2}=-\dfrac{20x}{(x^2+3)^2}=-f(x)\Rightarrow$ f ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung

- Untersuchung auf Achsenparallele Asymptoten

1. Asymptoten parallel zur x-Achse (Untersuchung des Verhaltens im Unendlichen)

$$\lim_{x\to\mp\infty}\left(\frac{20x}{x^4+6x^2+9}\right)=\lim_{x\to\mp\infty}\left(\frac{x}{x^4}\cdot\frac{20}{1+\frac{6}{x^2}+\frac{9}{x^4}}\right)=\lim_{x\to\mp\infty}\left(\frac{1}{x^3}\cdot\frac{20}{1+\frac{6}{x^2}+\frac{9}{x^4}}\right)=0\cdot\frac{20}{1+0+0}=0$$

Da die Funktion für $x\to\mp\infty$ einen Grenzwert besitzt, hat die Funktion eine waagerechte Asymptote mit der Gleichung $y=g$

Gleichung der waagrechten Asymptote von f: $y=0$ (x-Achse selbst)

2. Asymptoten parallel y-Achse (Untersuchung auf Polstellen)

Funktion ist für $x\in R$ definiert. D.h. sie besitzt keine Polstellen, also auch keine senkrechten Asymptoten.

- Angabe der Extrempunkte

GTR: $P_{\min}(-1;-1{,}25)$; $P_{\max}(1;1{,}25)$

Berechnung des Extrempkts mit dem GTR
- Fkt f befindet sich auf Position Y1
- Wechsel in das GRAPH-Menü
- Anzeigen des Fktsgraphen durch drücken der EXE-Taste oder der F6-Taste (Draw)
- F5-Taste (G-Solve)
- F2-Taste (MAX), die angezeigte Lösung (x und y) sind die Koordinaten des ges. Pkt

b) - Nachweis, dass F Stammfkt von f ist F Stammfkt von f $\Leftrightarrow F'(x)=f(x)$

$F(x)=-10(x^2+3)^{-1}:F'(x)=-10\cdot\left(-1\cdot(x^2+3)^{-2}\right)\cdot(2x)=\dfrac{20x}{(x^2+3)^2}=f(x)$

d.h. F ist Stammfkt von f

- Begründung, dass F höchstens einen Extrempkt besitzen kann

notwendige Bedingung für Existenz von Extrempktn: $f'(x_E)=0$

D.h. die Nullstellen der 1. Ableitung einer Fkt geben die möglichen Extremstellen an. Da f die 1.Ableitung von F ist und f genau eine Nullstelle besitzt, kann F maximal einen Extrempunkt haben.

- Aufstellung der Gleichung für die vollständig begrenzte Fläche in Abhängigkeit von a

$$A=\int_0^a f(x)dx=[F(x)]_0^a=-\frac{10}{a^2+3}-\left(-\frac{10}{0^2+3}\right)=\frac{10}{3}-\frac{10}{a^2+3}=A(a)$$

- Berechnung desjenigen a_I für das gilt $A(a_I)=2{,}5$

GTR: $a_l = 3$

Berechnung der x-Koordinate eines Pkts bei vorgegebener y-Koordinate mit GTR
- Fkt f befindet sich auf Position Y1
- Wechsel in das GRAPH-Menü
- Anzeigen des Fktsgraphen durch drücken der EXE-Taste oder der F6-Taste (Draw)
- F5-Taste (G-Solve)
- F6-Taste (weitere Menüpkte)
- F2-Taste (X-CAL)
- Eingabe des Wertes für Y an der Eingabeaufforderung EXE-Taste
- angezeigte x-Koordinate ist die Lsg

c) Extremwertproblem

1. Aufstellung der Zielfunktion

Extremgröße: Flächeninhalt eines Rechteckes $A_R = a \cdot b$

Nebenbedingungen: achsenparallele Lage und Diagonale Eckpkte $O(0;0)$ und $P(u;f(u))$

darum gilt 1. $a = u$ 2. $b = f(u)$

Einsetzen der Nebenbedingungen in die Ausgangsgleichung der Extremgröße

$$A_R = u \cdot \frac{20u}{(u^2+3)^2}$$

Aufstellung der Zielfunktion: $A_R(u) = \dfrac{20u^2}{(u^2+3)^2} \quad (u \in R; 0 < u < 10)$

2. Berechnung der Extrempunkte der Zielfkt in deren Definitionsbereich

GTR: $H(1{,}73;1{,}67)$

Berechnung des Extrempkts mit dem GTR
- Fkt f befindet sich auf Position Y1
- Wechsel in das GRAPH-Menü
- Anzeigen des Fktsgraphen durch drücken der EXE-Taste oder der F6-Taste (Draw)
- F5-Taste (G-Solve)
- F2-Taste (MAX), die angezeigte Lösung (x und y) sind die Koordinaten des ges. Pkt

Wählt man für u den Wert 1,73, dann erhält man das Flächengrößte Rechteck mit einem Inhalt von 1,67FE.

d) Aufstellung der Gleichung einer ganzrationalen Fkt 3. Grades

allgemeine Fktsgl.: $g(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

geltende Bedingungen:

1. g verläuft durch das lokale Minimum von f

$P_{\min}(f) = (-1;-1{,}25) \in g \Rightarrow (1): -1{,}25 = a_3(-1)^3 + a_2(-1)^2 + a_1(-1) + a_0$

2. g verläuft durch das lokale Maximum von f

$P_{\max}(f) = (1;1{,}25) \in g \Rightarrow (2): 1{,}25 = a_3 1^3 + a_2 1^2 + a_1 1 + a_0$

3. g besitzt bei $x = -\frac{1}{3}$ einen Wendepkt

$g''\left(-\frac{1}{3}\right) = 0$; $\quad g'(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$; $\quad g''(x) = 6a_3x + 2a_2$

$(3): 0 = 6a_3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 2a_2$

4. Tangente von g im Wendepkt hat den Anstieg $m_t = -\frac{1}{12}$

$m_t = g'(x_W) = g'\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{12}$

$(4)\ -\frac{1}{12} = 3a_3\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 2a_2\left(-\frac{1}{3}\right) + a_1$

Konstruktion eines linearen Gleichungssystems aus den geltenden Bedingungen

$$\begin{aligned}
(1):&\quad -1{,}25 = -a_3 + a_2 - a_1 + a_0\\
(2):&\quad 1{,}25 = a_3 + a_2 + a_1 + a_0\\
(3):&\quad 0 = -2a_3 + 2a_2\\
(4):&\quad -\frac{1}{12} = \frac{1}{3}a_3 - \frac{2}{3}a_2 + a_1
\end{aligned}$$

Lösung des Gleichungssystems mit GTR: $L = \{(1;1;0{,}25;-1)\}$ (Menü A EQUA, F1, F4)

gesuchte Gleichung: $g(x) = x^3 + x^2 + 0{,}25x - 1$

Teil B Geometrie / Algebra

geg.: Punkte $A(4;3;0)$; $B(10{,}5;4{,}5;0)$; $C(14;19;0)$; $D(2{,}5;9{,}5;0)$

Die Punkte A, B, C und D bilden die Grund-(Deck)-fläche eine vierseitigen, geraden Prismas. Die Höhe des Prismas beträgt 5LE

a) - Aufstellung der Koordinaten der Eckpkte E, F, G, H

Zugangsmöglichkeit 1

Da die Deckfläche senkrecht über der Grundfläche liegt und die Grundfläche in der x-y-Ebene, so erhält man die Koordinaten der Eckpunkte der Deckfläche, indem man die z-Koordinaten der Eckpunkte der Grundfläche (alle 0) durch 5 ersetzt.

Bsp.: $A(4;3;0)$ - $E(4;3;5)$

Zugangsmöglichkeit 2

Höhenvektor: $\vec{h} = \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DH} = \begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{OA} + \vec{h} = \begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\3\\5\end{pmatrix} \Rightarrow E(4;3;5)$$

analog für F, G, H: $F(10{,}5;4{,}5;5)$; $G(14;19;5)$; $H(2{,}5;9{,}5;5)$

- Nachweis, dass das Viereck $ABCD$ ein Drachenviereck ist

$ABCD$ ist Drachenviereck $\Leftrightarrow$ jeweils 2 benachbarte Seiten sind gleich lang

Berechnung der Seitenlängen mit GTR (kein Standard, Verwendung eines Programms)

$$\left.\begin{aligned}\overline{AB} &= 6{,}67 = \overline{DA}\\ \overline{BC} &= 14{,}92 = \overline{CD}\end{aligned}\right\} \Rightarrow ABCD \text{ ist Drachenviereck}$$

- Berechnung der Größe des Winkels $\angle BAD = \angle\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB}\right)$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}10{,}5-4\\4{,}5-3\\0-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6{,}5\\1{,}5\\0\end{pmatrix};\ \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}2{,}5-4\\9{,}5-3\\0-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1{,}5\\6{,}5\\0\end{pmatrix}$$

Berechnung des Winkels mit GTR (kein Standard, Verwendung eines Programms):

$\angle\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB}\right) = 90°$

b) - Aufstellung der Ebenengl. für die Ebene ε für die gilt: $A, C, E \in \varepsilon$

GTR (kein Standard, Verwendung eines Programms): $\varepsilon:\ 8x - 5y = 17$

- Aufstellung der Geradengl der Gerade h für die gilt: $B, H \in h$

$$h:\ \vec{x} = \overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{BH} = \begin{pmatrix}10{,}5\\4{,}5\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-8\\5\\5\end{pmatrix}$$

- Nachweis, dass $Q(6{,}5;7;2{,}5)$ Schnittpkt von ε und h ist

Ansatz: Q ist Schnittpkt von ε und h $\Leftrightarrow$ $Q \in \varepsilon$ und $Q \in h$

(I) Punktprobe für Q in ε

$8 \cdot 6{,}5 - 5 \cdot 7 = 17$ wahre Aussage $\Rightarrow$ (i) $Q \in \varepsilon$

(II) Punktprobe für Q in h

$$\left.\begin{array}{rll} 6{,}5 = & 10{,}5 - 8t & \overset{mit(1)}{\Rightarrow} \quad 10{,}5 - 8 \cdot 0{,}5 = 6{,}5 \quad \text{wahre Aussage} \\ 7 = & 4{,}5 + 5t & \overset{mit(1)}{\Rightarrow} \quad 4{,}5 + 2{,}5 = 7 \quad \text{wahre Aussage} \\ 2{,}5 = & 5t & \Rightarrow (1) \quad t = 0{,}5 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{(ii)} \ Q \in h$$

aus (i) und (ii) folgt die Behauptung

c) Begründung dafür, dass gilt: Volumen des Restkörpers $= \frac{5}{6}$ Volumen des Prismas

Sachverhalt: Vom Prisma ABCDEFGH (EFGHABCD) wird die Pyramide EFGB abgetrennt, so dass der Restkörper EFGHACD entsteht.

Behauptung: $V_R = \frac{5}{6} V_{\text{Pr}} \Leftrightarrow 6V_R = 5V_{\text{Pr}} \overset{V_R = V_{\text{Pr}} - V_{Py}}{\Leftrightarrow} 6V_{\text{Pr}} - 6V_{Py} = 5V_{\text{Pr}} \Leftrightarrow V_{\text{Pr}} = 6V_{Py}$

Volumen des Prismas: $V_{\text{Pr}} = A_{G\,\text{Pr}} \cdot h_{\text{Pr}} = A_{EFGH} \cdot \left|\overrightarrow{FB}\right|$

Volumen der Pyramide: $V_{Py} = \frac{1}{3} A_{GPy} \cdot h_{Py} = A_{EFG} \cdot \left|\overrightarrow{FB}\right|$

Einsetzen von (b), (c) in Beziehung (a)

$A_{EFGH} \cdot \left|\overrightarrow{FB}\right| = 2 \cdot \frac{1}{3} A_{EFG} \cdot \left|\overrightarrow{FB}\right| \Leftrightarrow A_{EFGH} = 2A_{EFG}$ D.h. die Behauptung ist wahr, wenn die Fläche des Vierecks EFGH doppelt so groß ist wie die des Dreiecks EFG.

Unter Aufgabe **a)** wurde nachgewiesen, dass das Viereck ABCD ein Drachenviereck ist, wobei die Diagonale durch A und C diejenige Diagonale ist, die das Drachenviereck halbiert. Da ABCD und EFGH Grund- und Deckfläche eines geraden Prismas sind, sind diese Flächen kongruent. D.h. die Diagonale durch E und G halbiert die Fläche des Vierecks EFGH.

Es gilt: $A_{EFGH} = A_{EFG} + A_{GHE} \overset{A_{GHE} = A_{EFG}}{=} A_{EFG} + A_{EFG} = 2A_{EFG}$

D.h. die Behauptung ist wahr.

d) Aufstellung der Gleichung der Tangente t am Kreis k (dessen Mittelpkt der Diagonalenschnittpkt des Vierecks ABCD ist) im Pkt $R(5{,}5;14)$

Gleichung der Tagente t an k in R

$t: \quad (x - x_M)(x_R - x_M) + (y - y_M)(y_R - y_M) = r^2$

Zur Aufstellung werden die Koordinaten des Kreismittelpunktes benötigt.

Aus Aufgabenteil **a)** folgt, dass der Diagonalschnittpkt der Mittelpkt der Strecke $\overline{BD}$ ist:

$M = M_{\overline{BD}}\left(\frac{10{,}5 + 2{,}5}{2}; \frac{4{,}5 + 9{,}5}{2}\right) = (6{,}5;7)$

Einsetzen aller Angaben in die Ansatzgl.:

$t: \quad (x - 6{,}5)(5{,}5 - 6{,}5) + (y - 7)(14 - 7) = 50$

$t: \quad -(x - 6{,}5) + 7(y - 7) = 50$

Teil C Stochastik

a) G_1 Glücksrad mit 36 gleichgroßen Sektoren, die mit den Zahlen 1 – 36 beschriftet sind. D.h. die Ermittlung jeder einzelnen Zahl bei einmaliger Drehung ist gleichwahrscheinlich.

ZEa:einmaliges Drehen des Glücksrades G_1 und Feststellung der erdrehten Zahl

LAPLACE-Experiment mit den Ereignissen 1 – 36, d.h. 36 mögliche Fälle

Ereignis A: eine durch 3 teilbare Zahl wurde erdreht

Berechnung der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A mit der Klassische Wahrscheinlichkeit:

$P(A) = \frac{\text{günstige Fälle}}{\text{mögliche Fälle}} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

b) ZEb1: einmaliges Drehendes Glücksrades G_1 und Feststellung ob eine durch fünf teilbare Zahl erdreht wurde

ZEb1 ist ein BERNOULLI-Experiment mit den Ereignissen

b ... Zahl durch 5 teilbar und

$\overline{b}$ ... Zahl nicht durch 5 teilbar

Die Wahrscheinlichkeit von b und $\overline{b}$ kann auf der LAPLACE-Basis (ZEa) mit der Formel für die Klassische Wahrscheinlichkeit ermittelt werden:

$$P(b) = \frac{\text{günstige Fälle}}{\text{mögliche Fälle}} = \frac{7}{36}$$

ZEb10: zehnmalige Nacheinanderausführung von ZEb1

ZEb10 ist eine BERNOULLI-Kette. Die Zufallsgröße X_{b10} gibt an, wie viele Erfolge bei der Durchführung des ZEb10 erzielt wurden. Dann ist X_{b10} eine binomalverteilte Zufallsgröße mit der Kettenlänge $n = 10$ und der Erfolgswahrscheinlichkeit $p = P(b) = \frac{7}{36}$.

Ereignis B_1 **genau 2** Erfolge wurden erzielt

$P(B_1) = P(X_{b10} = 2) \overset{GTR}{\approx} 0{,}3017$ (kein Standard, Verwendung eines Programms)

Ereignis B_2 **mindestens 2** aber **höchstens 5** Erfolge wurden erzielt

$P(B_2) = P(2 \le X_{b10} \le 5) \overset{GTR}{\approx} 0{,}6017$ (kein Standard, Verwendung eines Programms)

ZEbk: k-malige Nacheinanderausführung von ZEb1

ZEbk ist eine BERNOULLI-Kette. Die Zufallsgröße X_{bk} gibt an, wie viele Erfolge bei der Durchführung des ZEbk erzielt wurden. Dann ist X_{bk} eine binomalverteilte Zufallsgröße mit der Kettenlänge $n = k$ und der Erfolgswahrscheinlichkeit $p = P(b) = \frac{7}{36}$.

Ereignis B_3 **mindestens 1** Erfolg wurde erzielt

$P(B_1) \ge 0{,}99$

Übergang zum Gegenereignis:

Ereignis $\overline{B_3}$ **höchstens 0** Erfolge wurden erzielt

Die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses hängt nur von der Kettenlänge ab. Die Erfolgsanzahl ist feststehend. Deshalb kann dieses Ereignis zur Ermittlung der Kettenlänge verwendet werden.

$$P(B_3) = 1 - P(\overline{B_3}) = 1 - \binom{n}{0} p^0 (1-p)^n = 1 - \left(1 - \frac{7}{36}\right)^n \ge 0{,}99$$

Lösung der Ungleichung:

$$1 - \frac{29}{36}^n \ge 0{,}99$$

$$0{,}01 \ge \left(1 - \frac{7}{36}\right)^n$$

$$\ln 0{,}01 \ge n \ln\frac{29}{36} \Leftrightarrow \frac{\ln 0{,}01}{\ln\frac{29}{36}} \le n \Leftrightarrow n \ge 21{,}30$$

D.h. das Experiment muss mindestens 22mal durchgeführt werden.

c) gesucht ist die Gewinnerwartung eines Glücksspiels

D.h. wählt man als Zufallsgröße X_c den Gewinn, dann ist der gesuchte Wert der Erwartungswert der Zufallsgröße C

Ereignis n_i (erdrehter Sektor)	A	B	C	D
Einsatz in €	1	1	1	1
Auszahlung in €	0	2	1	5
Gewinn in € X_C	0-1=-1	2-1=1	1-1=0	3-1=4
Größe des Sektors	360°-(36°+120°+24°)=180°	36°	120°	24°
Wahrscheinlichkeit $P(n_i)$	$\frac{180°}{360°} = \frac{1}{2}$	$\frac{36°}{360°} = \frac{1}{10}$	$\frac{120°}{360°} = \frac{1}{3}$	$\frac{24°}{360°} = \frac{1}{15}$

Berechnung des Erwartungswertes

$$E(X_c) = \sum_{k=1}^{4} X_{Ci} \cdot P(X_{Ci}) = -1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{10} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{15} = \frac{2}{15} \approx -0{,}13$$

Bei einem Spiel muss der Spieler durchschnittlich mit einem Verlust von 0,13€ rechnen.

d) Zunächst teilt man das Glücksrad in n Einheitssektoren ein, die jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit erdreht werden können. Danach fasst man die Einheitssektoren zu größeren Sektoren zusammen, so dass das gewünschte Wahrscheinlichkeitsverhältnis erreicht wird.

Ansatz mit Klassischer Wahrscheinlichkeit: $\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\frac{4}{n}+\frac{8}{n}=1 \Leftrightarrow 1+2+4+8=n=15$

Gesamtanzahl von Einheitssektoren: $n=15$

Größe eines Einheitssektors: $\frac{360°}{15}=24°$

Sektor	1	2	3	4
Anteil an Gewinnchancen	1	2	4	8
Sektorgröße	$1\cdot 24°=24°$	$2\cdot 24°=48°$	$4\cdot 24°=96°$	$8\cdot 24°=192°$

Teil D1 Wahlaufgabe Analysis

gegeben: $f(x)=\left(3-\frac{3}{x}\right)e^{x} \quad (x\in R; -2\le x\le 2; x\ne 0)$

a) Aufstellung der Gleichung einer quadratischen Funktion

allgemeiner Funktionsterm: $g(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$

Bedingung 1: $P(0;-40)\in g$

(1) $g(0)=-40=a_2\cdot 0^2+a_1\cdot 0+a_0$

Bedingung 2: $x_{N1g}=x_{Nf}$

Ermittlung der NSt von f (Ablesen oder GTR) $x_{Nf}=1$

(2) $g(x_{N1g})=g(1)=0=a_2\cdot 1^2+a_1\cdot 1+a_0$

Bedingung 3: da g symmetrisch zur y-Achse verläuft, ist $x_{N2g}=-1$ ebenfalls NSt von g

(3) $g(x_{N2g})=g(-1)=0=a_2\cdot(-1)^2+a_1\cdot(-1)+a_0$

Aufstellung und Lösung eines linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned}-40 &= a_0\\ 0 &= a_2+a_1+a_0\\ 0 &= a_2-a_1+a_0\end{aligned}$$

Lösung mit GTR: $L=\{40;0;-40\}$

Gleichung von g: $g(x)=40x^2-40=40(x^2-1)$

Berechnung aller Schnittpkte mit GTR: $S_1(-1{,}03;2{,}12); S_2(-0{,}08;-39{,}77); S_3(1;0)$

Berechnung der Schnittpkte mit GTR
- Fkt f befindet sich auf Y1
- Fkt g befindet sich auf Y2
  Achtung: Die Graphen beider Fkt müssen angezeigt werden. Wählen Sie einen geeigneten Darstellungsbereich!
- Anzeigen der Fktsgraphen durch drücken der EXE-Taste oder der F6-Taste (Draw)
- F5-Taste (G-Solve)
- F5-Taste (ISCT)
  Falls nur die Fktn f, g angezeigt wurden erfolgt jetzt die Berechnung des ersten SPkts. Ansonsten müssen noch die richtigen Fktn ausgewählt werden.
- Drücken der NachRechts-Taste zur Berechnung weiterer SPkte

b) Ermittlung einer Tangentengl. (GTR TABL-Menü)

Gl. in Pkt-Richtungs-Form: $t_1: \quad y-0=8{,}15(x-1)$

Berechnung mit dem GTR
- Fkt f befindet sich auf Position Y1
- Wechsel in das TABLE-Menü
- Anzeigen der Wertetabelle durch drücken der EXE-Taste oder der F6-Taste (Draw)

-	Eingabe der x-Koordinate und drücken der EXE-Taste
-	in Zeile 1 / Spalte 2 (YI) wird die y-Koordinate des Berührungspkts angezeigt
-	in Zeile 1 / Spalte 3 (Y'I) wird der Tangentenanstieg angezeigt

Berechnung der maximalen Abweichung von f und t_1 (Extremwerproblem)

$d(x) = |f(x) - t_1(x)| \quad (x \in R; 0{,}8 \leq x \leq 1{,}2)$

d besitzt im Definitionsbereich keine lokalen Extrempkte. Deshalb muss das globale Maximum der Funktion ermittelt werden.

Berechnung der Funktionswerte an den Intervallrändern (GTR TABLE-Menü 7)

$d(0{,}8) \approx 0{,}04; \quad d(1{,}2) \approx 0{,}03$

Die maximale Abweichung beträgt 0,04LE

c) weiterhin gegeben: $h_a(x) = ax^2 - 20 \quad (x \in R; a \in R, a > 0)$

Extremwertproblem

Extremgröße: maximale Differenz der Funktionswerte an der Stelle $x = 1$

$d(1) = f(1) - h_a(1) = 0 - (a - 20) = 20 + a$

$\boxed{d(a) = 20 - a \quad (a \in R, a > 0)}$

Diese Fkt besitzt keine lokalen Extrempkte!

Es existiert weder ein lokales noch ein globales Maximum.

An einer Skizze des Sachverhaltes (oder Darstellung auf GTR im Menüpkt 6 DYNA) lässt sich dies deutlich erkennen.

Teil D2 Wahlaufgabe Geometrie / Algebra

gegeben: $M(3;-1;0)$; $g_a: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Die Geraden g_a verlaufen parallel zueinander, da sie alle den gleichen Richtungsvektor besitzen.

$$\begin{array}{rrrl} 3 = & a & +2r & \overset{mit(1)}{\Rightarrow} \quad a = 3 - 2\cdot 3 = -3 \\ -1 = & 8 & -3r & \overset{mit(1)}{\Rightarrow} \quad 8 - 3\cdot 3 = -1 \text{ wahre Aussage} \\ 0 = & -3 & +r & \Rightarrow (1)\, r = 3 \end{array}$$

b) regelmäßiges Sechseck mit Diagonalenschnittpkt M (Mittelpkt des Umkreises) und einem Eckpkt $A(3+\sqrt{3};-2;0)$

- Nachweis, dass $B(3+\sqrt{3};0;0)$ ein zu A benachbarter Eckpkt ist

Wenn Pkte M, A, B müssen ein gleichseitige Dreieck bilden, dann ist die Behauptung wahr.

Berechnung der Seitenlängen des Dreiecks mit GTR (kein Standard, Verwendung eines Programms)

$\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC} = 2 \Rightarrow$ Behauptung

- Berechnung des anderen benachbarten Eckpkts B' zu A

Die Pkte M, A, B, B' bilden ein Parallelogramm (sogar einen Rhombus). Deshalb gilt:

$$\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB'} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3+\sqrt{3}-\left(3+\sqrt{3}\right) \\ -2-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) von eine Pyramide ist bekannt, dass sie das regelmäßige Sechseck (liegt in x-y-Ebene) als Grundfläche hat und ein Volumen von $18\sqrt{3}VE$ besitzt.

Ermittlung aller Spitzen, die auf der Geraden g_{-3} liegen

Da die Grundfläche in der x-y-Ebene liegt, befinden sich alle Spitzen in zur x-y-Ebene parallelen Ebenen. Die Gleichungen derartiger Ebenen lauten $z = -h$ bzw. $z = h$. Die gesuchten Pkte sind die Durchstoßpkte der Geraden g_{-3} durch diese Ebenen.

Berechnung der Höhe der Pyramide:

$$V_{Py} = \frac{1}{3} A_G \cdot h = 18\sqrt{3} \Leftrightarrow h = \frac{3 \cdot 18\sqrt{3}}{A_G}$$

$$A_G = 6 \cdot A_{MAB} = 6 \cdot \frac{1}{2} g h_g = 3a \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{3\sqrt{3}}{2} \left|\overline{MA}\right|^2 = 6\sqrt{3}$$

$$h = \frac{3 \cdot 3 \cdot 6 \cdot \sqrt{3}}{6 \cdot \sqrt{3}} = 9$$

DSPkt g_{-3}, $z_1 = -9$ GTR: $S_1(-15;26;-9)$ (kein Standard, Verwendung eines Programms)

DSPkt g_{-3}, $z_2 = 9$ GTR: $S_2(21;-28;9)$ (kein Standard, Verwendung eines Programms)