Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Aus rechtlichen Gründen möchte ich Sie darauf hinweisen, dass Sie sich auf einer **privaten** Homepage befinden. Insbesondere ist dies **keine** Seite des Sächsischen Staatsministeriums für Kultus, welches die Abituraufgaben entwickelt.

Dies ist die Abschrift der Prüfungsaufgaben 2002. Sie wurde am Abend der schriftlichen Abiturprüfung veröffentlicht (und nicht vorher).

Außerdem sollten Sie folgendes wissen:

- Lösungen der Aufgaben können auf unterschiedlichen Wegen erreicht werden. Hier finden Sie VORSCHLÄGE zur Lösung und VORSCHLÄGE zur Bewertung, die nicht für die Bewertung Ihres Abiturs herangezogen werden können. Dafür ist jeder prüfende Fachlehrer verantwortlich.
- Ich habe versucht, den graphikfähigen Taschenrechner (GTR – hier TI 82/83/83+) besonders häufig einzusetzen. Damit sollen Möglichkeiten aufgezeigt werden, auch wenn eine Rechnung vielleicht schneller zum Ziel führen würde.
- Eingesetzte Programme finden Sie auf den Mathe-Seiten des sächsischen Schulservers unter www.sn.schule.de/~matheabi dokumentiert und anhand von vielen Beispielen erklärt. Insbesondere möchte ich auf eine zusammenfassende Broschüre zu diesem Thema verweisen: www.sn.schule.de/~matheabi/data/gtrZsfsg.pdf.
- Die offiziellen Abituraufgaben werden nach Beendigung der Prüfungsphase auf dem Sächsischen Schulserver veröffentlicht.
- Für Nachfragen und Ihre Hinweise stehe ich Ihnen gerne zur Verfügung: F. Müller (Mathe-Lehrer).
- Wenn Sie Fehler finden oder Ergänzungen haben, teilen Sie mir das bitte mit.

Grundkurs

Pflichtaufgaben

Teil A: Analysis

Gegeben sind die Funktionen f und F durch die Gleichungen $y = f(x) = \dfrac{20x}{(x^2+3)^2}$ $(x \in \mathbf{D_f})$ und

$y=F(x)= -\dfrac{10}{x^2+3}$ $(x \in \mathbf{R})$.

a) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich und die Nullstelle der Funktion f an.
Untersuchen Sie die Funktion f auf Symmetrie.
Untersuchen Sie die Funktion f auf achsenparallele Asymptoten und geben Sie gegebenenfalls deren Gleichungen an.
Der Graph der Funktion f besitzt genau zwei lokale Extrempunkte P_{MIN} und P_{MAX}.
Geben Sie die Koordinaten dieser Punkte an.

Erreichbare BE-Anzahl: 9

b) Weisen Sie nach, dass die Funktion F eine Stammfunktion der Funktion f ist.
Begründen Sie, dass die Funktion F höchstens eine lokale Extremstelle hat.

Für jedes a ($a \in \mathbf{R}$, $a > 0$) begrenzen der Graph der Funktion f, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = a$ eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche in Abhängigkeit von a. Ermitteln Sie den Wert a, für den der Flächeninhalt 2,5 beträgt.

Erreichbare BE-Anzahl: 7

c) Für jedes u ($u \in \mathbf{R}$, $0 < u < 10$) sind der Koordinatenursprung und der Punkt $P_u(u \mid f(u))$ Eckpunkte eines achsenparallelen Rechtecks. Es existiert genau ein Wert u, für den der Flächeninhalt des zugehörigen Rechtecks maximal wird.
Ermitteln Sie diesen Wert u und geben Sie den maximalen Flächeninhalt an.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

d) Der Graph einer ganzrationalen Funktion g dritten Grades verläuft durch die lokalen Extrempunkte P_{MIN} und P_{MAX} des Graphen der Funktion f.
Außerdem hat die Funktion g an der Stelle $x = -1/3$ einen Wendepunkt.
In diesem Wendepunkt besitzt die Tangente an den Graphen der Funktion g den Anstieg $-1/12$.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion g.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

Teil B: Geometrie /Algebra

Die Abbildung zeigt die Skizze eines in einem kartesischen Koordinatensystem dargestellten geraden Prismas mit der Grundfläche ABCD und der Höhe h = 5. Die Eckpunkte der Grundfläche sind die Punkte $A(4 \mid 3 \mid 0)$, $B(21/2 \mid 9/2 \mid 0)$, $C(14 \mid 19 \mid 0)$ und $D(5/2 \mid 19/2 \mid 0)$

a) Geben Sie die Koordinaten der restlichen Eckpunkte des Prismas an.
Zeigen Sie, dass das Viereck ABCD ein Drachenviereck ist.
Ermitteln Sie die Größe des Winkels ∢BAD.

Erreichbare BE-Anzahl: 6

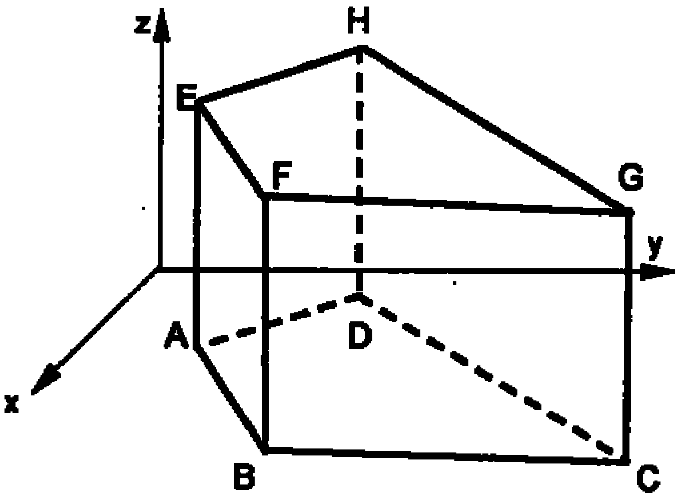


Abbildung 1 (Skizze nicht maßstäblich)

b) Durch die Punkte A, C und E ist eine Ebene ε und durch die Punkte B und H eine Gerade h bestimmt.
Geben Sie jeweils eine Gleichung der Ebene ε und der Geraden h an.
Untersuchen Sie, ob der Punkt Q(13/2 | 7 | 5/2) Schnittpunkt der Ebene ε und der Geraden h ist.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

c) Vom geraden Prisma ABCDEFGH wird die Pyramide mit der Grundfläche EFG und der Spitze B abgetrennt.
Begründen Sie, dass das Volumen des Restkörpers 5/6 des Volumens des Prismas beträgt.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

Die folgende Teilaufgabe bezieht sich nur auf die x-y-Ebene.

d) In der x-y-Ebene liegt ein Kreis k, dessen Radius $r = \sqrt{50}$ beträgt und dessen Mittelpunkt der Schnittpunkt der Diagonalen des Vierecks ABCD ist.
Die Gerade t sei Tangente an den Kreis k im Punkt R (11/2 | 14).
Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente t.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

Teil C: Stochastik

Ein Glücksrad G_1 ist in 36 gleich große Sektoren eingeteilt, die paarweise verschieden mit den natürlichen Zahlen von 1 bis 36 beschriftet sind. Bei jeder Drehung des Rades wird genau ein Sektor mithilfe eines Zeigers "gezogen".

a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür an, dass bei einer Drehung des Rades G_1 eine durch drei teilbare Zahl „gezogen“ wird.

Erreichbare BE-Anzahl: 1

b) Das Glücksrad G_1 wird 10-mal gedreht.
Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass dabei genau zweimal eine durch 5 teilbare Zahl „gezogen“ wird.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei mindestens zweimal, aber höchstens fünfmal eine durch 5 teilbare Zahl „gezogen“ wird.
Ermitteln Sie, wie oft man das Glücksrad G_1 mindestens drehen muss, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% wenigstens einmal eine durch 5 teilbare Zahl „gezogen“ wird?

Erreichbare BE-Anzahl: 5

c) Das Glücksrad G_2 sei in vier Sektoren A, B, C und D eingeteilt (Abbildung 2).
Zentriwinkel des Sektors B: 36° des Sektors C: 120° des Sektors D: 24°

Bei jeder Drehung des Rades wird mithilfe eines Zeigers genau ein Sektor ermittelt.
Der Spieler zahlt einen Einsatz von 1 € und erhält beim "Ziehen" des Sektors D 5 €, des Sektors B 2 € und des Sektors C 1 € ausgezahlt. Bei der Ziehung des Sektors A erhält er nichts.
Ermitteln Sie, welchen Gewinn (erhaltenes Geld abzüglich des Einsatzes) ein Spieler im Schnitt erwarten kann.

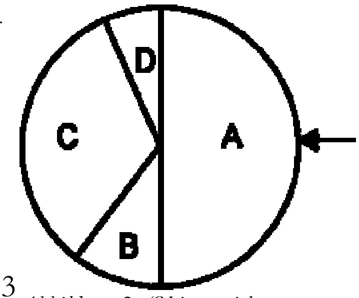


Abbildung 2: (Skizze nicht maßstäblich)

Erreichbare BE-Anzahl: 3

d) Das Glücksrad G_3 sei in vier Sektoren eingeteilt.
Geben Sie die Größen der Zentriwinkel dieser Sektoren so an, dass sich die Wahrscheinlichkeiten, mit denen sie "gezogen" werden, wie 1 : 2 : 4 : 8 verhalten.

Erreichbare BE-Anzahl: 1

Teil D: Wahlaufgaben

Wählen Sie genau eine der folgenden Aufgaben zur Bearbeitung aus.

Aufgabe D 1: Analysis

Gegeben ist eine Funktion f durch

$$y=f(x)=\left(3-\frac{3}{x}\right)\cdot e^{x} \quad (x \in \mathbf{R}, -2 \leq x \leq 0).$$

a) Der Graph einer quadratischen Funktion g, der achsensymmtrisch zur y-Achse ist, verläuft durch den Punkt P(0; -40). Außerdem ist die Nullstelle der Funktion f auch Nullstelle der Funktion g.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion g und geben Sie alle Schnittpunkte der Graphen der Funktionen f und g an.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

b) Der Graph der Funktion t ist Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt Q(1 | f(1)). Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Tangente t.
Im Intervall $0{,}8 \leq x \leq 1{,}2$ wird der Graph der Funktion f näherungsweise durch diese Tangente t beschrieben.
Ermitteln Sie die maximale Abweichung der Funktionswerte der Funktionen f und t in diesem Intervall.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

c) Für jedes a ($a \in \mathbf{R}$, $a > 0$) ist eine Funktion h_a durch $y = h_a(x) = ax^2 - 20$ ($x \in \mathbf{R}$) gegeben.
Es existiert ein Wert a, so dass die Funktionen f und h_a an der Stelle x = 1 die maximale Differenz ihrer Funktionswerte $f(x) - h_a(x)$ haben.
Berechnen Sie diesen Wert a und geben Sie die maximale Differenz an.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

Aufgabe D 2: Geometrie / Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind der Punkt M(3; -1; 0) und für jedes a ($a \in \mathbf{R}$) eine

Gerade g_a durch die Gleichung (r ∈ **R**) gegeben.

a) Begründen Sie, dass alle Geraden g, zueinander parallel verlaufen.
Es gibt einen Wert a, für den der Punkt M Schnittpunkt der Geraden g, mit der x-y-Koordinatenebene ist. Ermitteln Sie diesen Wert a.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

M ist der Schnittpunkt der Diagonalen eines in der x-y-Koordinatenebene liegenden regelmäßigen Sechsecks ABCDEF mit dem Eckpunkt A(3+√3 | -2 | 0).

b) Zeigen Sie, dass ein zum Punkt A benachbarter Eckpunkt des Sechsecks die Koordinaten (3+√3 | 0 | 0) besitzt.
Berechnen Sie die Koordinaten des anderen benachbarten Eckpunktes des Punktes A.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

c) Das Sechseck ABCDEF ist Grundfläche von schiefen Pyramiden mit dem Volumen 18√3, deren Spitzen auf der Geraden g_{-3} liegen.
Ermitteln Sie die Koordinaten aller Punkte, die Spitzen einer solchen Pyramide sind.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

Lösungsvorschläge

Teil A

a) Definitionsbereich: $D_f = \{x \mid x \in \mathbf{R}\}$
Nullstelle: $x_N = 0$
Ansatz für Symmetrie: f(-x) = -f(x)
Symmetrie: punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung
Aussage zu senkrechten Asymptoten: es gibt keine
Verhalten im Unendlichen: $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\to} 0$
Gleichung der waagerechten Asymptote: y = 0
Koordinaten des lokalen Minimumpunktes: $P_{MIN}(-1 \mid -1{,}25)$
Koordinaten des lokalen Maximumpunktes: $P_{MAX}(1 \mid 1{,}25)$

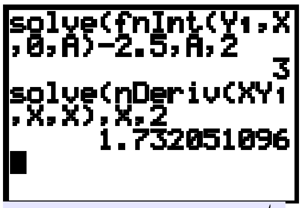
b) Ansatz für Nachweis der Stammfunktion: F'(x) = f(x)
Nachweis der Stammfunktion: $F'(x) = -10\cdot((x^2+3)^{-1})' = -10 \cdot (-1) \cdot (x^2+3)^{-2} \cdot 2x$
Begründung: Da f genau eine Nullstelle besitzt und F stetig ist, kann F nicht mehr als eine lokale Extremstelle haben.
Ansatz für Flächenberechnung: $\int_0^a f(x)dx = 2{,}5 \quad \Rightarrow A(a) = |F(a) - F(0)|$
Flächeninhalt in Abhängigkeit von a: $A(a) = -10/(a^2+3) + 10/3$
Ansatz für Wert a: z. B. mit GTR
`solve(fnInt(Y1,X,0,A)-2.5,A,2)` →[1] 3
Wert a: a = 3

c) Ansatz für Zielfunktion: A(u) = u · f(u)

1 Es dauert einen kleinen Moment, bis das Ergebnis angezeigt wird. Der Einsatz des GTR umgeht A(a) und bietet sich dann als Alternative an, wenn A(a) nicht berechnet werden kann oder es vielleicht falsch berechnet worden ist.

Zielfunktion: $A(u) = 20u^2/(x^2 + 3)^2$

weiter mit GTR: `solve(nDerive(X*Y1,X,X),X,2)` → 1,732



Extremstelle u: $u = \sqrt{3}$

Flächeninhalt A: A = 1,67

d) Ansatz für Gleichung der Funktion g:

g: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

I: $P_{MIN} \in g$

II: $P_{MAX} \in g$

III: $g''(-1/3) = 0$

IV: $g'(-1/3) = -1/12$

1. und 2. Ableitung der angenommenen Funktion g:

g': $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

g'': $y'' = 6ax + 2b$

und Übersetzung der oben stehenden Gleichungen:

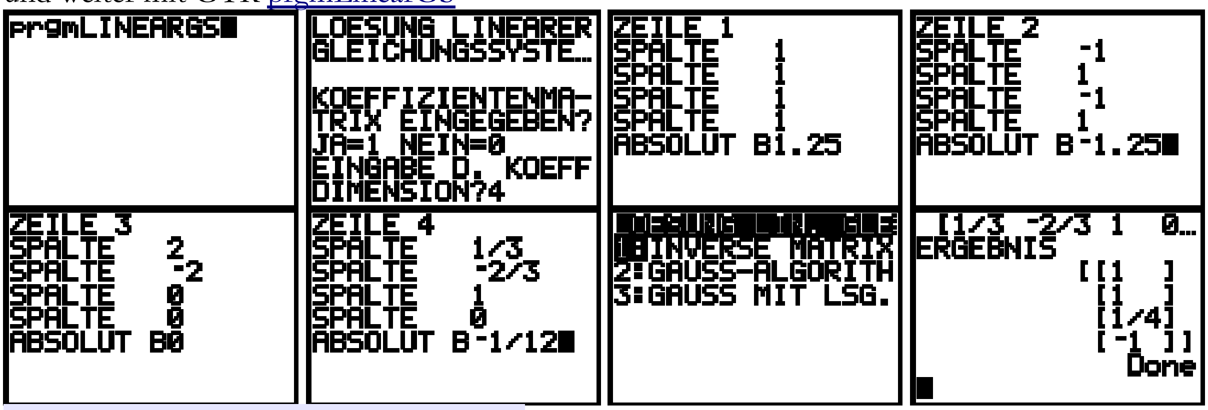
I: $a + b + c + d = 5/4$

II: $-a + b - c + d = -5/4$

III: $2a - 2b = 0$

IV: $1/3\,a - 2/3\,b + c = -1/12$

und weiter mit GTR prgmLinearGS



zwei Gleichungen des Gleichungssystems

zwei weitere Gleichungen des Gleichungssystems

Gleichung der Funktion g: $y = x^3 + x^2 + 0{,}25x - 1$

Teil B

a) Koordinaten der restlichen Eckpunkte: E(4 | 3 | 5), F(10,5 | 4,5 | 5), G(14 | 19 | 5), H(2,5 | 9,5 | 5)

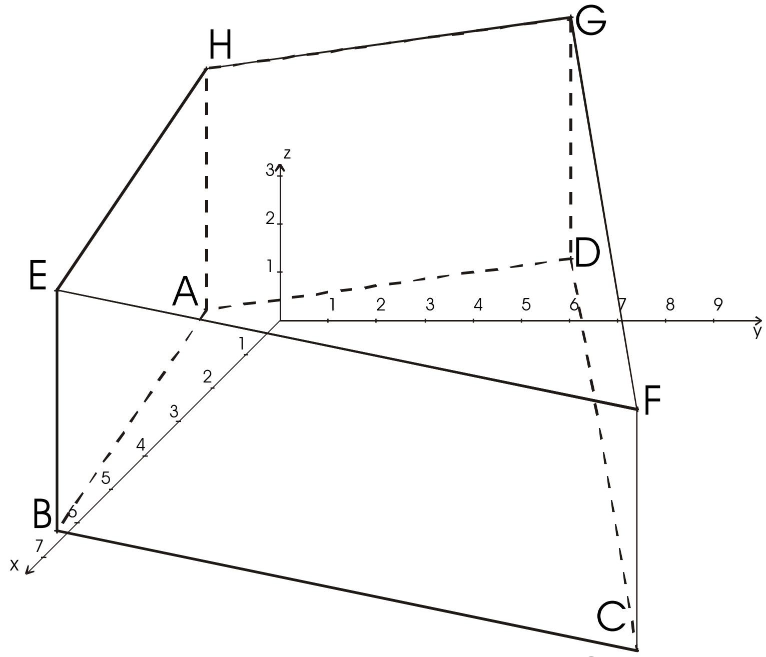
2 Streckenlängen: $\overline{AB} = \overline{AD} = \sqrt{44{,}5}$

alle Streckenlängen: $\overline{CB} = \overline{CD} = \sqrt{222{,}5}$

Schlussfolgerung: Viereck ABCD ist ein Drachenviereck

Ansatz für Größe des Winkels: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6{,}5 \\ 1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 6{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$

Größe des Winkels: $\sphericalangle BAD = 90°$



b) Gleichung der Ebene $\mathcal{E}$:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}10\\16\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix}$$

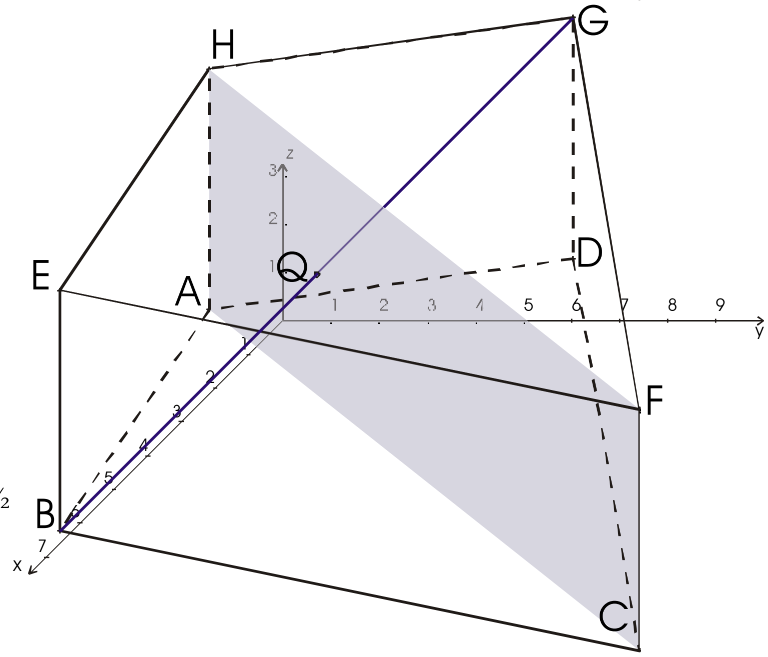
($t, s \in \mathbf{R}$)

Gleichung der Geraden h:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}10{,}5\\4{,}5\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-8\\5\\5\end{pmatrix} \quad (r \in \mathbf{R})$$

Ansatz für Nachweis: $Q \in \mathcal{E}$ und $Q \in h$ und aus Aufgabenstellung ist ersichtlich, dass $h \not\subset \mathcal{E}$

Nachweis: mit $s = ½$; $t = ¼$ und $r = ½$ folgt $\mathcal{E} \cap h = Q$



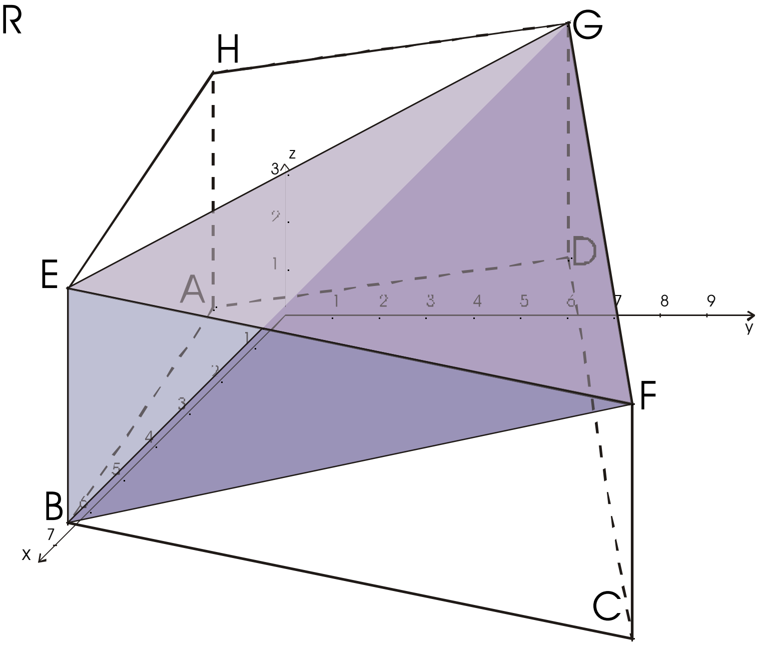
c) Aussage zum Verhältnis der Grundflächen A_G: $A_{G,EFGH} : A_{G,EFG} = 2 : 1$

Da das Prisma gerade ist, ist auch die Pyramide gerade und deren Höhen sind identisch.

Aussage zum Verhältnis der Volumina von Pyramide und Prisma: $V_{Prisma} = 1/6\ V_{Pyramide}$

Schlussfolgerung für Restkörper

d) Mittelpunkt des Kreises: M (6,5 | 7);
R $\in k_{M;\sqrt{50}}$
Gleichung der Tangente:
y = 1/7 x + 185/14 oder
$\vec{x} = \begin{pmatrix} 5{,}5 \\ 14 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$



Teil C

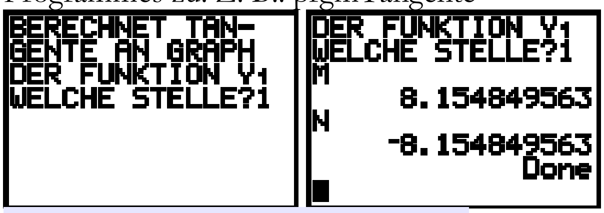
a) Wahrscheinlichkeit: p = 1/3
E_1 = {3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36} und $|E_1|$ = 12
b) Verteilung der Zufallsgröße:
E_2 = {5, 10, 15, 20, 25, 30, 35};
$|E_2|$ = 7 => $P(E_2)$ = 7/36
Wir betrachtet, ob das Ereignis E_2 eintritt oder nicht, liegt eine Binomialverteilung mit den Parametern n = 10 und p = 7/36 vor.
Wahrscheinlichkeit P(X = 2): P(X = 2) = 0,3017 = $B_{n,p}(2)$
Wahrscheinlichkeit $P(2 \le X \le 5)$: $P(2 \le X \le 5)$ = 0,6017 = $B_{n,p}(2) + B_{n,p}(3) + B_{n,p}(4) + B_{n,p}(5)$
Ansatz für Anzahl: (Bernoulli-Kette) $1-(1-p)^n > 99\,\%$ => n > 21,3
Anzahl n: n = 22
c) Wahrscheinlichkeiten, mit denen die Sektoren gewählt werden: (Tabelle 1)
Verteilung der Zufallsgröße Y
Erwartungswert: E(Y) = -0,13 €
d) Größe der Winkel: 24°, 48°, 96°, 192°

y_i	$P(Y=y_i)$	*Gewinn*
A	1/2	-1 €
B	1/10	1 €
C	1/3	0 €
D	1/15	4 €

Tabelle 1

Aufgabe D 1

a) Nullstelle der Funktion f: $x_0 = 1$
g(x) = ax² + c (wegen Achsensymmetrie ist b = 0) und
I: g(1) = 0
II: g(0) = -40
Gleichung der Funktion g: y = g(x) = 40x² - 40
Koordinaten der Schnittpunkte: S_1 (-1,03 | 2,12), S_2 (0,08 | -39,77), S_3 (1 | 0)
b) Ansatz für Gleichung der Tangente t: y = mx + n
mit m = f'(1) und n = f(1) – f'(1)·1
„Ermitteln Sie" lässt den Einsatz eines GTR-Programmes zu. Z. B.: prgmTangente



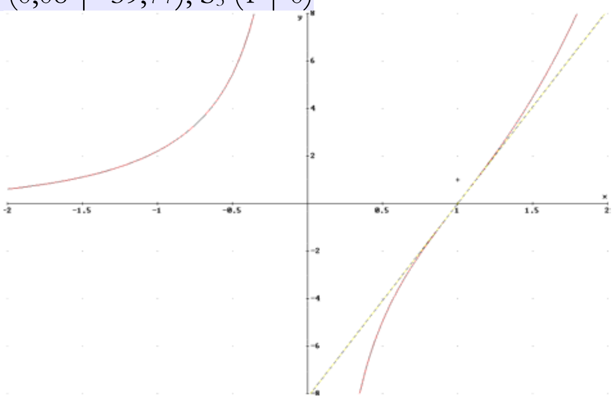


Abbildung 6: f(x) mit Tangente t

Gleichung der Tangente: y = 3ex - 3e = t(x)
Ansatz für maximale Abweichung:
d(x) = f(x) – t(x) und die maximale Abweichung liegt am Intervallrand (vgl. Abbildung 6)
d(0,8) = -0,0381879
d(1,2) = 0,0290892

Maximale Abweichung d: d ≈ -0,038

c) Lösungsidee: gesucht ist a_e für $k_a(x) := f(x) - h_a(x)$; dabei muss $k'_a(1) = 0$ sein

1. Ableitung: $k'_a(x) = 3e^x \cdot \frac{(x^2 - x + 1)}{x^2} - 2ax$ und $k'_a(1) = 3e^1 - 2a = 0$

Wert a: a = 3/2 e

maximale Differenz d: d ≈ 15,92

Aufgabe D 2

a) Begründung: Der Parameter a ist nicht im Richtungsvektor der Geraden enthalten. Ändert sich a, so ändert sich lediglich der Stellungsvektor von g_a nicht der Richtungsvektor.

Ansatz für Wert t: $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Wert a: a = -3

b) Ansatz für Nachweis: Das Dreiecke, das durch die Punkte A, M und den, in der Aufgabenstellung gegebenen Punkt B, gebildet wird, ist gleichseitig.

Nachweis für gegebenen benachbarten Punkt: $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{AB} = 2$

Koordinaten des anderen benachbarten Punktes: (3 | -3 | 0) = F

Zum Beispiel $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BM}$, denn das Viereck ABMF ist ein Parallelogramm.

c) Flächeninhalt der Grundfläche: $A_G = 6 \cdot A_{\Delta ABM} = 6\sqrt{3}$

$V = 1/3\, A_G\, h$

Höhe: h = ±9 und die gesuchten Spitzen liegen auf g_{-3} in der Höhe z = ±9

Ansatz für Koordinaten der Punkte: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ \pm 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Koordinaten der Punkte S_1 und S_2: $S_1(21 \mid -28 \mid 9)$, $S_2(-15 \mid 26 \mid -9)$ für $r_1 = 12$ und $r_2 = -6$

Leistungskurs

Pflichtaufgaben

Teil A: Analysis

Gegeben sind Funktionen f_k und g_k durch die Gleichungen
$y=f_k(x)=x^2\, e^{1-kx}$ und $y=g_k(x)=x\, e^{1-kx}$ ($k\in\mathbf{R}$, $k>0$; $x\in\mathbf{R}$)

a) Geben Sie für die Funktionen f_k die Nullstellen an.
Weisen Sie nach, dass für die 2. Ableitung der Funktionen f_k gilt: $f_k''(x)=e^{1-kx}\,(k^2x^2-4kx+2)$ ($k\in\mathbf{R}$, $k>0$; $x\in\mathbf{R}$).
Berechnen Sie die Koordinaten der lokalen Extrempunkte der Funktionen f_k und untersuchen Sie die Art der Extrema.
Zeigen Sie, dass eine Funktion existiert, auf deren Graph alle lokalen Extrempunkte der Graphen der Funktionen f_k liegen.
Erreichbare BE-Anzahl: 12

b) Für jedes k besitzt der Graph der Funktion f_k genau zwei Wendepunkte.
Berechnen Sie die Wendestellen.
Erreichbare BE-Anzahl: 2

c) Für jedes k haben die Graphen der Funktionen f_k und g_k genau zwei gemeinsame Punkte.
Berechnen Sie die Koordinaten dieser Punkte.
Geben Sie den Wert k an, für den sich die zugehörigen Graphen im Punkt $Q(1 \mid 1)$ schneiden.
Erreichbare BE-Anzahl: 4

d) Für jedes k existiert die Tangente an den Graphen der Funktion f_k an der Stelle $x = 1$.
Ermitteln Sie den Wert k, für den der Anstiegwinkel dieser Tangente 45° beträgt und geben Sie für diesen Fall eine Gleichung dieser Tangenten an.
Erreichbare BE-Anzahl: 5

e) Für jedes u ($u\in\mathbf{R}$; $u>0$) sind der Koordinatenursprung und der Punkt $R_u(u \mid f_1(u))$ Eckpunkte eines achsenparallelen Rechtecks.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes R_u so, dass der Flächeninhalt des zugehörigen Rechtecks maximal wird.
Geben Sie den maximalen Flächeninhalt an.
Erreichbare BE-Anzahl: 5

f) Bestimmen Sie eine Gleichung einer Stammfunktion G_k der Funktion g_k.

Der Graph der Funktion g_1, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = 4$ begrenzen eine Fläche vollständig.
Für jedes a ($a\in\mathbf{R}$, $0<a<4$) zerlegt die Gerade mit der Gleichung $x=a$ diese Fläche in zwei Teilflächen.
Ermitteln Sie den Wert a, für den beide Teilflächen den gleichen Flächeninhalt besitzen.
Erreichbare BE-Anzahl: 7

Teil B: Geometrie /Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(8 \mid 0 \mid -5)$, $B(5 \mid 8 \mid 0)$, $C(-4 \mid 4 \mid 1)$, $D(-1 \mid -4 \mid -4$ und für jedes a ($a\in\mathbf{R}$, $a>0$) der Punkt $S_a\,(2 + 2a \mid 2 - 3a \mid -2 + 6a)$ gegeben.
Für jedes a ($a\in\mathbf{R}$, $a>0$) sind die Punkte A, B, C, D und S, Eckpunkte einer Pyramide mit der Grundfläche ABCD.

a) Weisen Sie nach, dass jede Pyramide ABCDS, eine gerade, quadratische Pyramide ist.
Bestimmen Sie das Volumen der Pyramide $ABCDS_3$.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes S_a für den die Pyramide $ABCDS_a$ ein Volumen von 38 1/9 hat.

Erreichbare BE-Anzahl: 13

b) Ermitteln Sie die Größe des Schnittwinkels der Ebene einer Seitenfläche der Pyramide $ABCDS_3$ mit der Ebene der Grundfläche dieser Pyramide.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

c) Der Kreis k ist Umkreis der Grundfläche der Pyramide $ABCDS_3$. Ermitteln Sie das Volumen des Kreiskegels, der durch den Kreis k und den Punkt S_3 als Spitze bestimmt ist.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

d) Die x-y-Koordinatenebene teilt die Pyramidengrundfläche ABCD in zwei Teilflächen.
Geben Sie jeweils die Art der entstehenden Teilflächen an und begründen Sie Ihre Entscheidung.
Berechnen Sie den Flächeninhalt derjenigen Teilfläche, die den Punkt C als Eckpunkt enthält.

Erreichbare BE-Anzahl: 6

Teil C: Stochastik

Eine Firma stellt Heizelemente mit einer Leistung von 1000 W her.

a) Zwei Kontrolleure K_1 und K_2 überprüfen die in der Firma produzierten Heizelemente auf Mängel. Kontrolleur K_1 prüft 65% und Kontrolleur K_2 prüft 35% der Produkte. Bekannt ist, dass Mängel durch Kontrolleur K_1 mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,85 und durch Kontrolleur K_2 mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,90 entdeckt werden.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein mangelhaftes Heizelement erkannt wird.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein bei der Kontrolle nicht erkanntes, mangelhaftes Heizelement von Kontrolleur K_1 geprüft wurde.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

b) Das Heizelement und ein weiteres Teil bilden die für das Funktionieren eines elektrischen Gerätes verantwortlichen Bestandteile. Im Verlauf eines Jahres fällt das Heizelement mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,10 und das andere Teil mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,08 aus. Die Ausfälle sind voneinander unabhängig. Die Reparatur des Heizelements kostet 25 € und die des anderen Teils 15 €.

Führen Sie eine Zufallsgröße ein, die die im Verlauf eines Jahres auftretenden Reparaturkosten beschreibt und berechnen Sie die im Jahr pro produziertes Gerät zu erwartenden Reparaturkosten.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

c) Die Leistung der in der Firma produzierten genormten Heizelemente (Nennleistung 1000 W) sei normalverteilt mit einer Standardabweichung von 100 W.
Ermitteln Sie unter diesen Voraussetzungen, welcher Anteil der produzierten Heizelemente eine Leistung zwischen 950 W und 1050 W aufweist.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

d) 60% aller Heizelemente werden auf Maschine M_1, die restlichen auf Maschine M_2 gefertigt. Berechnen Sie den Anteil der fehlerhaften Teile an der Gesamtproduktion der Firma unter den Voraussetzungen, dass 90% der auf Maschine M_1 produzierten Teile fehlerfrei sind und dass 58% aller fehlerfreien Teile von dieser Maschine kommen.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

Teil D: Wahlaufgaben

Wählen Sie genau eine der folgenden Aufgaben zur Bearbeitung aus.

Aufgabe D 1: Analysis

Gegeben ist die Funktion $y = f(t) = 5\,e^{(-\frac{1}{4}t)} - \sin(\pi t)$ $(t \in \mathbf{R},\ t \geq 0)$.
Der Graph der Funktion f beschreibt eine gedämpfte Schwingung eines Federschwingers.
Der Wert f(t) entspricht der Auslenkung (Elongation) des Schwingers zum Zeitpunkt t.

a) In dieser Teilaufgabe wird der Verlauf der Schwingung dieses Federschwingers im Zeitintervall $0<=t<=2$ betrachtet.
Geben Sie die Nullstellen, die Koordinaten der lokalen Extrempunkte und die Art der Extrema an.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

b) Weisen Sie nach, dass keine Extremstelle der Funktion f das arithmetische Mittel der jeweils benachbarten Nullstellen ist.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

c) Die Funktionswerte $f(n + \frac{1}{2})$ $(n \in \mathbf{N})$ können näherungsweise als momentane maximale Auslenkungen der Schwingung des Federschwingers betrachtet werden.

Weisen Sie nach, dass die Folge der Beträge dieser Funktionswerte eine geometrische Zahlenfolge ist.
Ermitteln Sie, wie viele aufeinander folgende Glieder dieser Folge zu addieren sind, damit die Summe erstmals größer als 19 ist.

Erreichbare BE-Anzahl: 7

Aufgabe D 2: Geometrie / Algebra

Der Bearbeitungstisch einer Bohranlage (Ausgangslage ABCD) kann mithilfe einer Hydraulik um die Höhe h angehoben und um den Neigungswinkel α $(\alpha \leq 90°)$ um die Achse $\overline{F_hG_h}$ gekippt werden. Beide Bewegungen sind miteinander kombinierbar.

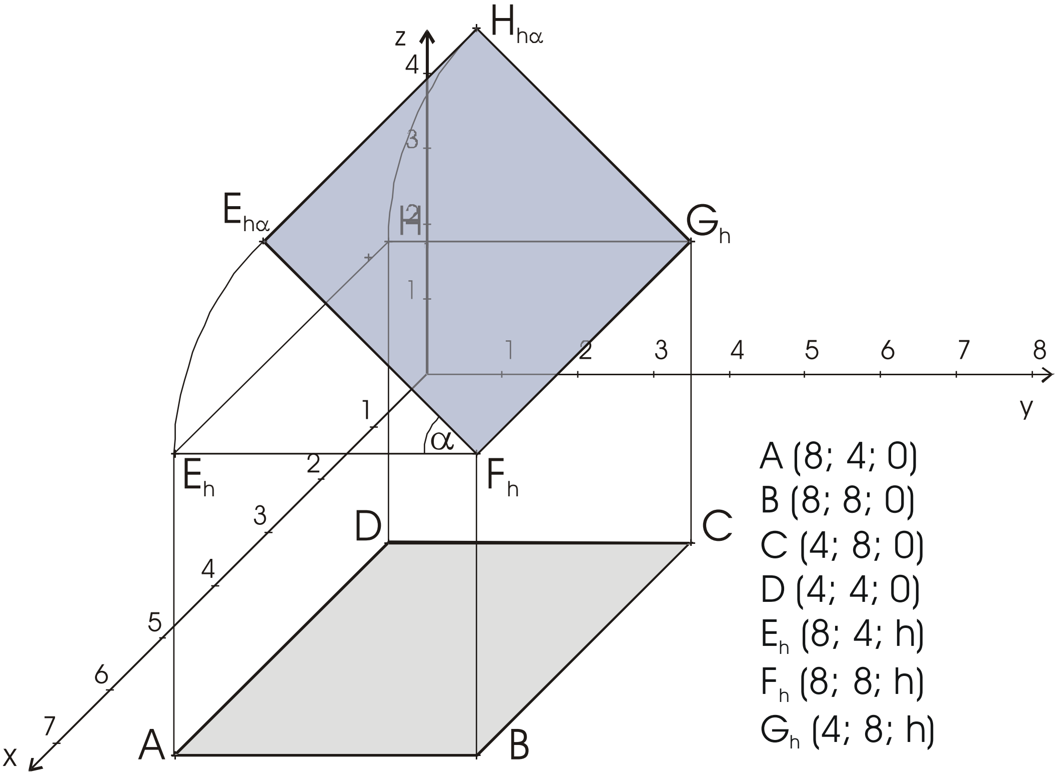


Abbildung 7: (Skizze nicht maßstäblich)

Bei einer bestimmten Lage des Bohrtisches befinden sich die vier Eckpunkte der Tischplatte $E_{h\alpha}$, F_h, G_h und $H_{h\alpha}$ in der Ebene E mit der Gleichung $y + z = 12$.

a) Berechnen Sie, um welche Höhe h der Bohrtisch angehoben ist.
Berechnen Sie den Neigungswinkel α.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

b) Zur Kontrolle der Bohrtischlage wird vom Punkt L(0; 10; 20) aus ein Laserstrahl auf den Bohrtisch gerichtet und bei oben beschriebener Lage am Punkt R(6; 6; 6) der Bohrtischebene reflektiert. Ein Kontrollsensor für den Empfang des reflektierten Strahles soll an der Wand der Werkhalle, die durch die Gleichung y = 13 beschrieben wird, angebracht werden. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes, in dem der Kontrollsensor befestigt werden muss.

Erreichbare BE-Anzahl: 6

Der Bohrtisch sei nun um eine Höhe h angehoben und um einen Winkel α gekippt.

c) Zeigen Sie, dass die Gleichung der Ebene $\varepsilon_{h\alpha}$, in der sich der Bohrtisch in diesem allgemeinen Fall befindet, in der Form

$$(\sin\alpha)\, y + (\cos\alpha)\, z = 8 - \sin\alpha + h\cos\alpha$$

angegeben werden kann.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

Lösungsvorschläge

Teil A

a) Nullstelle: $x_N = 0$
Ansatz für 1. Ableitung
1. Ableitung: $f_k(x) = e^{(1-k\cdot x)}\cdot(2\cdot x - k\cdot x^2)$
Ansatz für Nachweis der angegebenen zweiten Ableitung
Nachweis für angegebene zweite Ableitung
Ansatz für lokale Extremstellen : $f_k'(x_E) = 0$
lokale Extremstellen: $x_{E1} = 0$; $x_{E2} = 2/k$
Nachweis und Art der Extrema: $f_k''(0) = 2e \Rightarrow$ lok. Min.; $f_k''(2/k) = -2e \Rightarrow$ lok. Max.
Koordinaten der lokalen Extrempunkte: $P_{MIN}\,(0 \mid 0)$; $P_{MAX}\,(2/k \mid 4/(k^2e))$
Ansatz für Gleichung der Funktion, auf deren Graph die lokalen Maximumpunkte liegen
$P_{MAX}\,(2/k \mid 4/(k^2e)) \Rightarrow x = 2/k \Rightarrow k = 2/x$ und $y = 4/(k^2e) = 4/((2/k)^2e)$
Gleichung der Funktion: $g(x) = y = x^2/e$
Nachweis, dass der lokale Minimumpunkt auf dem Graphen liegt: $P_{MIN} \in g(x)$

b) Ansatz für Wendestellen: $f_k''(x_W) = 0$

Wendestellen: $x_{W_1} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{k}$;

$x_{W_1} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{k}$

c) Ansatz für Koordinaten der Schnittpunkte:
$f_k(x_S) = g_k(x_S)$
x-Koordinaten der Schnittpunkte: $x_{S1} = 0$;
$x_{S2} = 1$
Koordinaten der Schnittpunkte: $S_1\ (0 \mid 0)$;
$S_2(1 \mid e^{1-k})$
Wert k: k=1

d) t_k: $y = mx + n$ mit $x_S = 1$ (entspricht S_2)
Anstieg der Tangente: $m = f_k'(x_S) = (2-k)\cdot e^{1-k}$
Ansatz für Wert k: $m = \tan 45° = 1$
$1 = (2-k)\cdot e^{1-k}$ {mit GTR → solve-Funktion}
Wert k: k = 1
y-Koordinate des Berührungspunktes:
$n = e^{1-k} - e^{1-k} \cdot 1 = 0$
Gleichung der speziellen Tangente: y = x

e) Ansatz für Zielfunktion: $A(u) = u\cdot f_1(u)$
Zielfunktion: $A(u) = u^3\, e^{1-u}$
Extremstelle: u = 3
GTR: `solve(nDerive(A(X),X,X),X,2)`
maximaler Flächeninhalt: $A \approx 3{,}65$
Koordinaten des Punktes R_u: $R_u\ (3;\ 9/e^2)$

f) Ansatz für partielle Integration:

$G_k(x) = \int x\cdot e^{1\quad kx}\,dx$ und

$\int u\,v' = u\cdot v - \int u'\cdot v$ mit u = x und v' = e^{1-}
kx

partielle Integration:

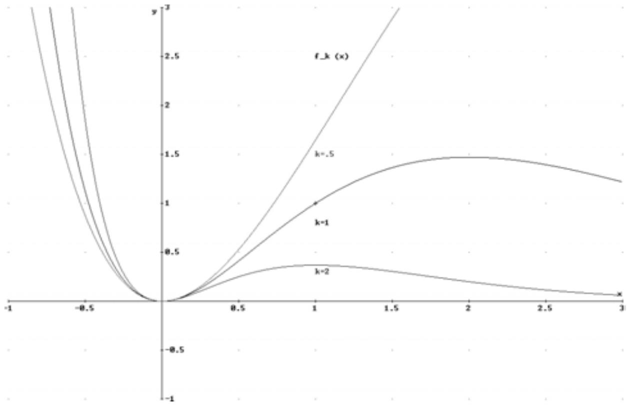


Abbildung 8: $f_k(x)$ für k=1; 2; 0,5

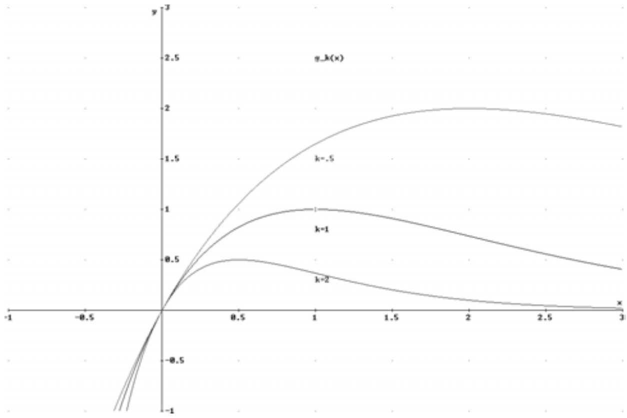


Abbildung 9: $g_k(x)$ für k=1; 2; 0,5

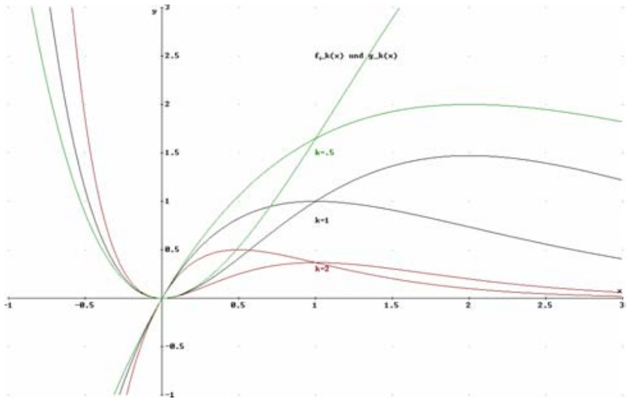


Abbildung 10: beide Funktionen gemeinsam

$$G_k(x) = x\cdot\left(-\frac{1}{k}\right)\cdot e^{1\quad kx} - \int -\frac{1}{k}\cdot e^{1\quad kx}\,dx = -\frac{x}{k}\cdot e^{1\quad kx} + \frac{1}{k}\cdot\int e^{1\quad kx}\,dx$$

Gleichung einer Stammfunktion: $G_k(x) = e^{1-k}\cdot(-xk^{-1} - k^{-2})$

Ansatz für Flächeninhalt der Gesamtfläche: $\int_0^a g_1(x)\,dx = \int_a^4 g_1(x)\,dx$ (beide positiv)

GTR[2]: `solve(fnInt(g1(x),X,0,A)-fnInt(g1(x),X,A,4),A,2)` → **1,53618**
Flächeninhalt der Gesamtfläche: $A_G \approx 2{,}47$
Ansatz für Wert a
Wert a: $a \approx 1{,}54$

2 Diese Variante führt direkt zum Ziel. Außerdem fließen keine Zwischenergebnisse, die möglicherweise falsch sind, in die Rechnung ein.

Teil B

a) Nachweis der Parallelität gegenüberliegender Seiten
Nachweis der gleichen Streckenlänge eines Paares benachbarter Seiten
Nachweis der Orthogonalität zweier anliegender Seiten:

z. B.: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$

Ansatz für Nachweis:
M = (2 | 2 | -2) ist Mittelpunkt des Quadrates und damit Lotfußpunkt jeder Pyramide
Nachweis der Eigenschaft „gerade Pyramide“:

1. $M = S_0$
2. Jeder Punkt S_a liegt auf einer Gerade: $s_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$
3. Der Normalenvektor der Grundfläche E_{ABCD} $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 28 \\ -42 \\ 84 \end{pmatrix}$ kann mit GTR bestimmt werden, zum Beispiel mit prgmGeometri → Vektorprodukt.
4. Der Richtungsvektor von s_a ist parallel zum Normalenvektor. Deshalb liegt jede Spitze S_a senkrecht über M. Damit ist die Pyramide gerade.

Flächeninhalt der Grundfläche: $A_G = (7\cdot\sqrt{2})^2$
Gleichung der Ebene der Grundfläche
Höhe der Pyramide $ABCDS_3$: h = $|\overrightarrow{S_3 M}|$ = 21
Volumen der Pyramide $ABCDS_3$: V = 686

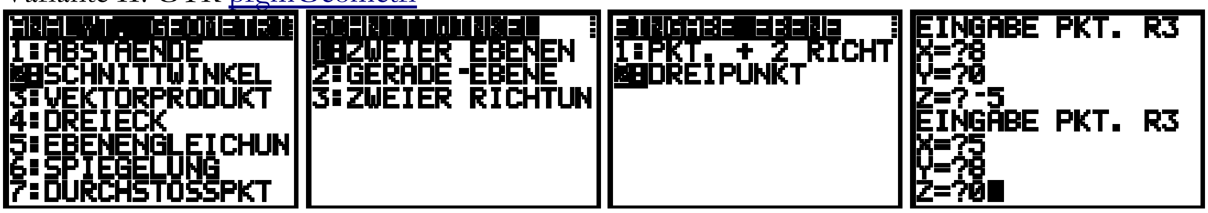
Ansatz für Höhe der Pyramide $ABCDS_a$: h(a) = $|\overrightarrow{S_a M}| = \left| \begin{pmatrix} 2a \\ -3a \\ 6a \end{pmatrix} \right|$ = 7a (a > 0)

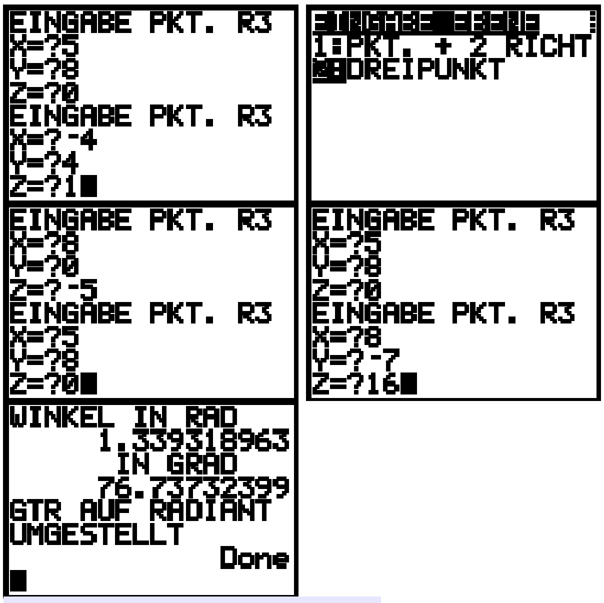
Umformungen
Ansatz für Koordinaten des Punktes S_a: V(a) = 98/3 · 7a = 343/9
Koordinaten des Punktes S_a: $S_{\frac{1}{6}}\left(\frac{7}{3} \,|\, \frac{3}{2} \,|\, -1\right)$

b) Variante I: elementargeometrisch (Abbildung 11 – gelbes Dreieck)

$$\alpha = \arctan\left(\frac{h}{|\overrightarrow{M\,M_{BC}}|}\right) = \arctan\left(\frac{21}{\frac{7}{2}\sqrt{2}}\right)$$

Variante II: GTR prgmGeometri





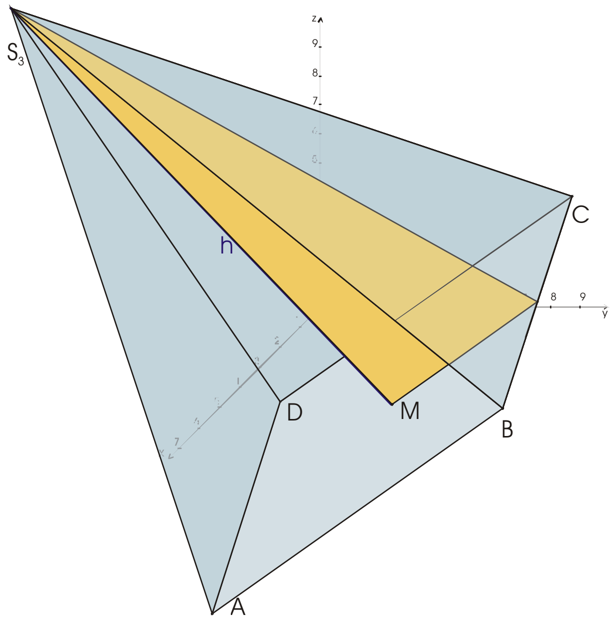


Abbildung 11

Ansatz für Größe des Winkels
Normalenvektor der Ebene einer Seitenfläche
Größe des Winkels: a ≈ 76,7°

c) Ansatz für Radius: r = $|\overrightarrow{AM}| = 7$
Radius des Kreises k
Volumen des Kreiskegels: V = 1078

d) Arten der Teilflächen: Dreieck und Trapez
Begründung: Punkt C ist oberhalb der Ebene mit z = 0, Punkt B liegt auf dieser Ebene und die Punkte B und D liegen unterhalb (Abbildung 12)
Ansatz für dritten Eckpunkt des Dreiecks:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{OC} + s \cdot \vec{CD} \quad \Rightarrow s = 1/5$$

Koordinaten des dritten Eckpunktes des Dreiecks:
P(-3,4 | 2,4 | 0)

Ansatz für Flächeninhalt: $A = \frac{1}{2}\overline{PC} \cdot \overline{BC}$

Flächeninhalt: A = 9,8

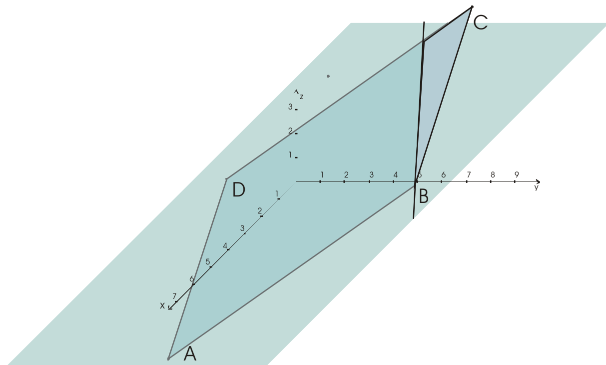


Abbildung 12

Teil C

a) Ansatz für Wahrscheinlichkeit
Variante I: Baumdiagramm (Abbildung 13)
ariante II: Gegebenes und Gesuchtes notieren
Zufallsgröße M – Mangel entdeckt
Zufallsgröße K_i – Kontrolleur i hat geprüft mit i ∈ {1, 2}
$P(K_1) = 0,65$; $P(K_2) = 0,35$
$P_{K1}(M) = 0,85$
$P_{K2}(M) = 0,9$
ges.:
P(M) und $P_{\overline{M}}(K_1)$

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit: $P(M) = P(K_1) \cdot P_{K1}(M) + P(K_2) \cdot P_{K2}(M)$

Wahrscheinlichkeit, dass ein mangelhaftes Heizelement erkannt wird: p = 0,8675

bedingte Wahrscheinlichkeiten:

$P(K_1 \cap \overline{M})$ und $P(\overline{M})$

Anwenden des Satzes von Bayes:

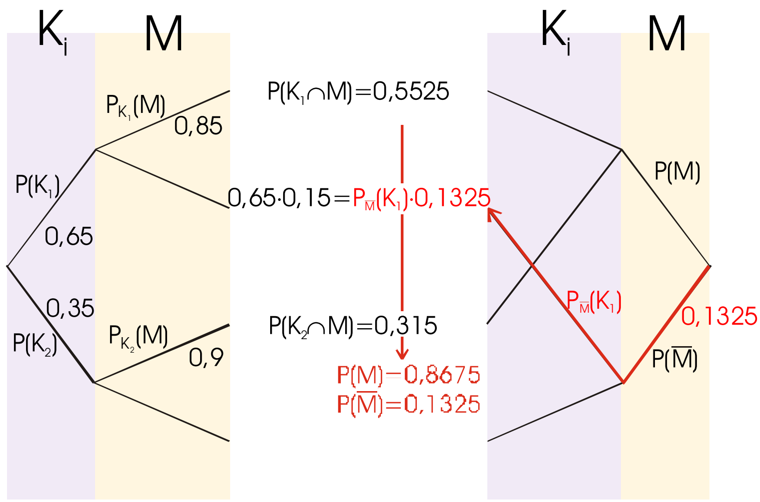


Abbildung 13

$$P_{\overline{M}}(K_1) = \frac{P(K_1 \cap \overline{M})}{P(\overline{M})} = \frac{0{,}65 \cdot 0{,}15}{1 - 0{,}8675}$$

Wahrscheinlichkeit, dass das Heizelement von Kontrolleur K_1 geprüft wurde: p ≈ 0,7358

b) Werte der Zufallsgröße

X – Zufallsgröße, die die anfallenden Reparaturkosten beschreibt

Wahrscheinlichkeitsverteilung

P (X=25) = 0,1 · 0,92; P (X=15) = 0,9 · 0,08; P (X=40) = 0,1 · 0,08; P (X=0) = 0,92 · 0,9;

Erwartungswert: E(X) = 3,70 €

c) Ansatz für Anteil: $\mu = 1000$; $\sigma = 100$;

$P(950 \le X \le 1050) \approx \Phi(0{,}5) - \Phi(-0{,}5)$

Umformungen

Anteil: ≈ 38%

oder GTR: fnInt(e^(-(X-1000)²/20000),X,950,1050)/(100√(2π)) → 0,3829

ergibt sich aus: $$P(950 \leq X \leq 1050) = \int_{950}^{1050} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

d) Ansatz für Wahrscheinlichkeit eines fehlerfreien Heizelementes von Maschine M_2

Wahrscheinlichkeit eines fehlerfreien Heizelementes von Maschine M_2

Ansatz für Anteil

Anteil: ≈ 7% = 1 - 0,931

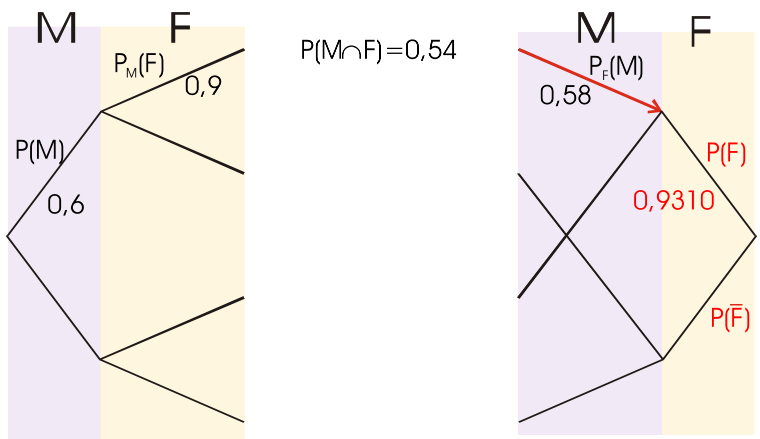


Abbildung 14

Aufgabe D 1

a) Nullstellen : $t_{N1} = 0$; $t_{N2} = 1$; $t_{N3} = 2$

Koordinaten der lokalen Extrempunkte: P_{MAX} (0,47; 4,43); P_{MIN} (1,47, -3,45)

Die Ränder sollten auch genannt werden: $P_{MIN,R}$ (0 | 0) ; $P_{MAX,R}$ (2 | 0). Sie bringen jedoch keine Bewertungseinheiten bzw. bei Nichtangabe werden keine BE abgezogen.

Art der Extrema

b) Nullstellen: $x_{0n} = n$ mit $n \in \mathbf{N}$
arithmetisches Mittel zweier benachbarter Nullstellen: $x_{m\,n} = n + ½$
1. Ableitung: $f'(t) = 5\, e^{(-¼\, t)}\, [-¼ \sin(\pi t) + \pi \cos(\pi t)\,]$
Ansatz für Nachweis:
Variante I: $f'(n+½) \neq 0$
Variante II: $f'(t_e) = 0$
Nachweis:
Variante I:

$$f'(n+\frac{1}{2}) = 5\cdot e^{\frac{1}{4}\left(n+\frac{1}{2}\right)}\cdot\left[-\frac{1}{4}\sin\left(\pi\cdot\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)+\pi\cdot\cos\left(\pi\cdot\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)\right]$$

$$f'(n+\frac{1}{2}) = \underbrace{5\cdot e^{\frac{1}{4}\left(n+\frac{1}{2}\right)}}_{\neq 0}\cdot\left[\underbrace{-\frac{1}{4}\cos(\pi\cdot n)}_{=\mp\frac{1}{4}} - \underbrace{\pi\cdot\sin(\pi\cdot n)}_{=0}\right]$$

$$f'(n+\frac{1}{2}) = \mp\frac{5}{4}\cdot e^{\frac{1}{4}\left(n+\frac{1}{2}\right)}\neq 0$$

Da die Ableitung an den untersuchten Stellen nicht Null ist, findet sich dort kein Extrempunkt.
Variante II:

$$f'(t_e) = \underbrace{5\cdot e^{\frac{1}{4}\cdot t_e}}_{\neq 0}\cdot\left[-\frac{1}{4}\sin(\pi\, t_e)+\pi\cdot\cos(\pi\, t_e)\right] = 0 \quad \Rightarrow \sin(\pi t_e) = 4\,\pi \cos(\pi t_e)$$

$\Rightarrow \tan(\pi t_e) = 4\,\pi \Rightarrow \pi t_e = \operatorname{atan}(4\pi) + k\pi$ mit $k \in \mathbf{Z}$ (Hier gilt die Einschränkung $k \in \mathbf{N}$)
$\Rightarrow t_e = \operatorname{atan}(4\pi)/\pi + k \approx .47472 + k$
Die Extremstellen der Funktion befinden sich bei .47472 + k und nicht bei ½ + k, wie irrtümlich zu vermuten wäre.

c) Glied a_n
Glied a_{n+1}
Ansatz für Nachweis: zum Beispiel durch Umformung der Funktion f(n+½)

$$\begin{aligned} & f\,(n+\frac{1}{2}) \\ &= 5\cdot e^{\frac{1}{4}(n+\frac{1}{2})}\cdot\sin\left(\pi\,(n+\frac{1}{2})\right) \\ &= 5\cdot e^{\frac{1}{4}(n+\frac{1}{2})}\cdot\left(-\underbrace{\cos(\pi\, n)}_{=\pm 1}\right) \\ &= \mp 5\cdot e^{\frac{1}{4}n\;\frac{1}{8}} = \underbrace{5\cdot e^{\frac{1}{8}}}_{a_0}\cdot\underbrace{\left(\mp e^{\frac{1}{4}}\right)^n}_{=q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{k}|f\,(n+\frac{1}{2})| \\ &= a_0\cdot\frac{|q|^{k+1}-1}{|q|-1} \\ &= 5\cdot e^{\frac{1}{8}}\cdot\left(\frac{e^{\frac{1}{4}(k+1)}-1}{e^{\frac{1}{4}}-1}\right) > 19 \end{aligned}$$

Nachweis
Glied a_0
Ansatz für Anzahl
Variante I: allgemeine Lösung

$$\left(\frac{5\cdot e^{\frac{1}{8}}}{1-e^{\frac{1}{4}}}\right)\cdot\left(1-e^{\frac{1}{4}(k+1)}\right)>19$$

$$1-e^{\frac{1}{4}(k+1)}>\frac{19\cdot\left(1-e^{\frac{1}{4}}\right)}{5\cdot e^{\frac{1}{8}}}$$

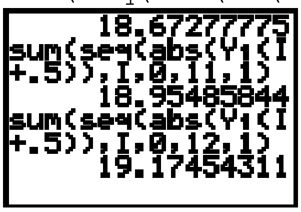
$$e^{\frac{1}{4}(k+1)}<1-\frac{19\cdot\left(1-e^{\frac{1}{4}}\right)}{5\cdot e^{\frac{1}{8}}}$$

$$-\frac{1}{4}(k+1)<\ln\left(1-\frac{19\cdot\left(1-e^{\frac{1}{4}}\right)}{5\cdot e^{\frac{1}{8}}}\right)$$

$$k>-4\cdot\ln\left(1-\frac{19\cdot\left(1-e^{\frac{1}{4}}\right)}{5\cdot e^{\frac{1}{8}}}\right)-1$$

Variante II: GTR
`Y1=5e^(-.25X)*sin(πX)`
zum Beispiel

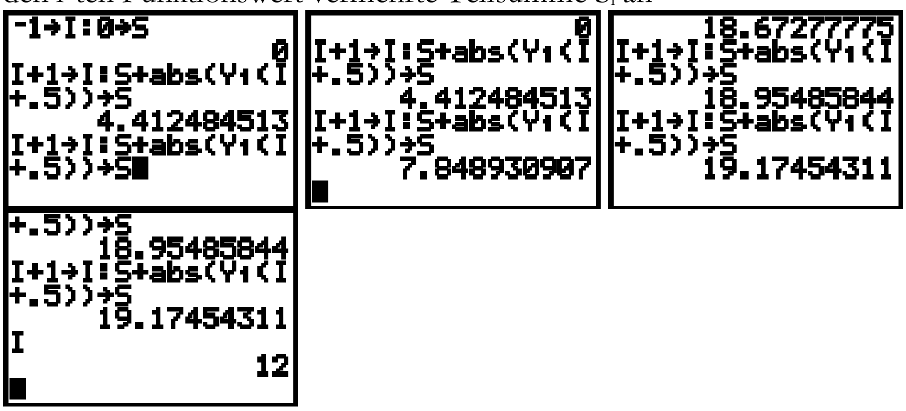
1. Berechnung der Summe einer Liste von Funktionswerten z. B. von 0 bis 10:
   `sum(seq(abs(Y1(I+.5)),I,0,10,1))`



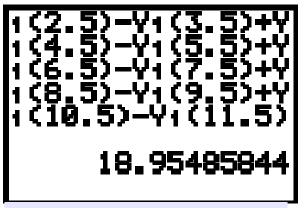
2. iterativ:

   1. `-1→I:0→S`

   2. `I+1→I:S+abs(Y1(I+.5))→S`
      Dieser Befehl muss mittels „Entry“ wiederholt ausgeführt werden. S gibt dann die jeweils um den i-ten Funktionswert vermehrte Teilsumme S_i an



3. Summieren von Hand:
   Eine erste Abschätzung der Anzahl sollte dieser Variante vorangehen, denn zur Addition sehr vieler Werte reicht die Zeit nicht.



Anzahl der Glieder: 13

Aufgabe D 2

a) Ansatz für Höhe: $G_h \in \mathcal{E}$: $y + z = 12$
Höhe h: $h = 4$
Ansatz für Neigungswinkel: $E_{4\alpha} \in \mathcal{E}$ mit
$E_{h\alpha}$ $(8 \mid 8 - 4\cos\alpha \mid h + 4\sin\alpha)$ und $h = 4 \Rightarrow$
$8 - 4\cos\alpha + 4 + 4\sin\alpha = 12$
Neigungswinkel α: $\alpha = 45°$
und $E_{h\,45°}$ $(8 \mid 8 - 2\sqrt{2} \mid h + 2\sqrt{2})$

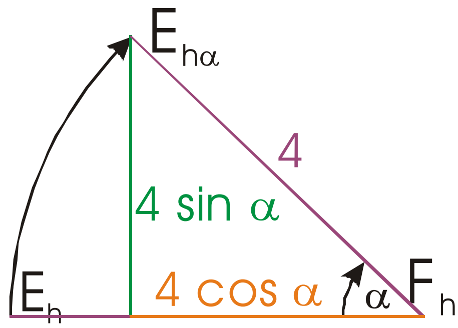


Abbildung 15

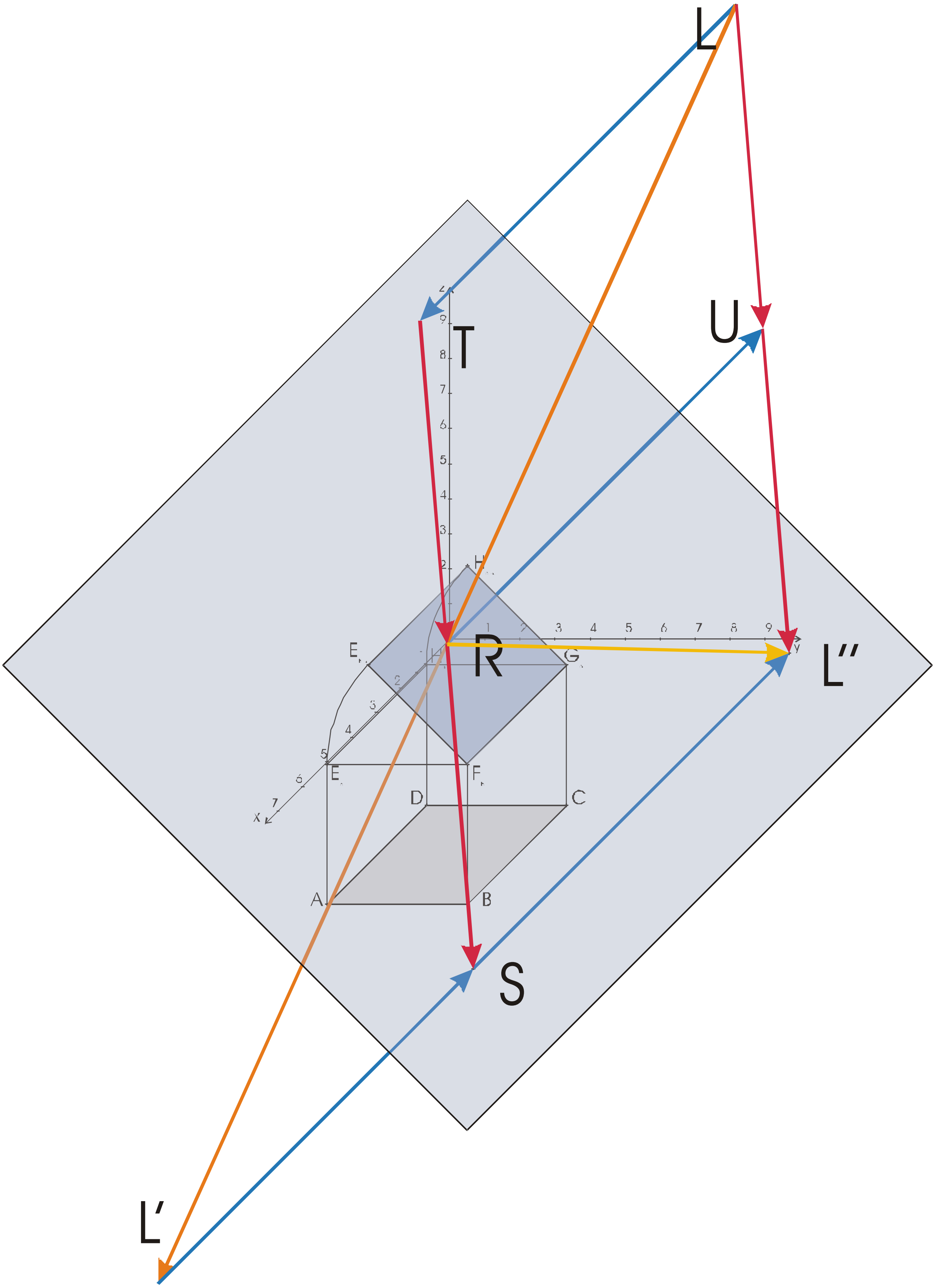


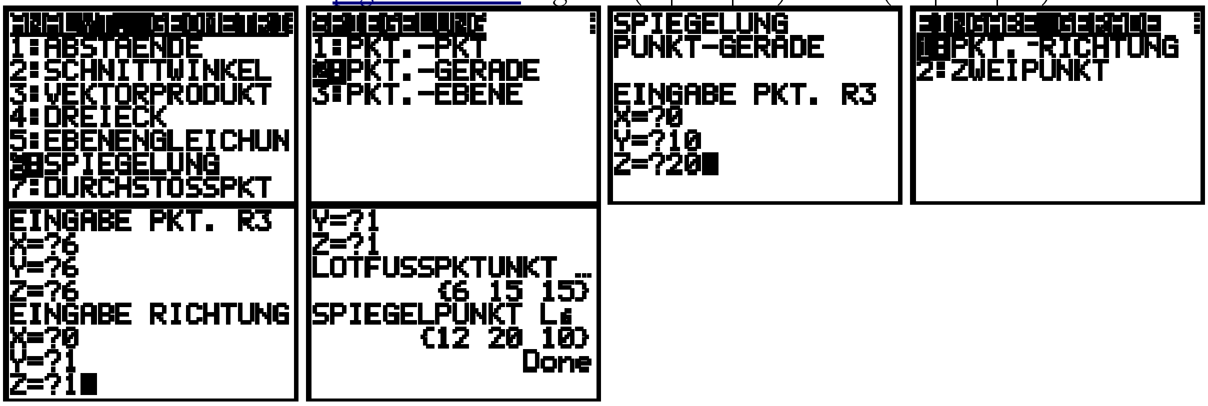
Abbildung 16: Teil D2 b)

b) Wahl eines zu spiegelnden Punktes[3]: siehe Abbildung 16

Der Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ kann aus der Koordinatenform der Ebene y + z = 12 herausgelesen werden.

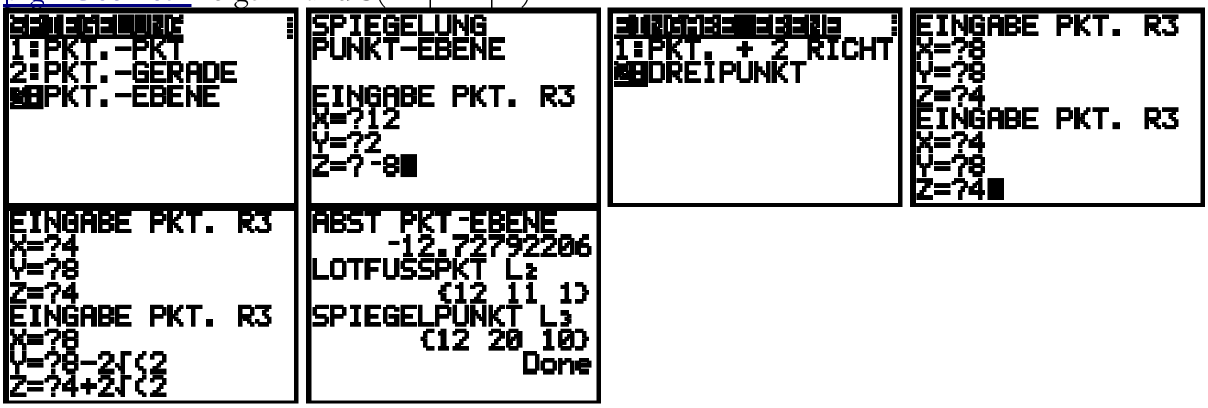
Variante I:

Geradenspieglung von L an der Ebenennormalen $g_{normal}\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ durch R führt über U direkt zu L''. GTR prgmGeometri ergibt U(6 | 15 | 15) und L''(12 | 20 | 10).



Variante II:

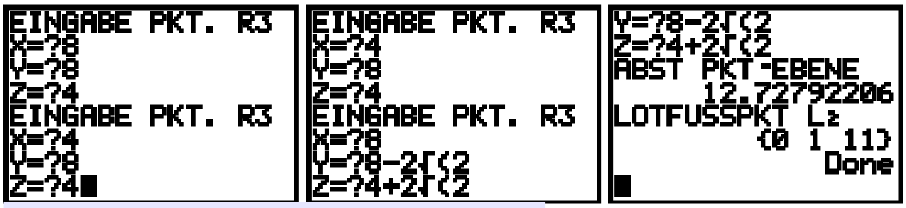
ähnlich wie beim Billardspielen wird in der Verlängerung von $\vec{LR}$ der Punkt L' ermittelt und dieser an der Ebene Ɛ mit dem Lotfußpunkt S zu L'' gespiegelt. Mit L'(12 | 2 | -8) und GTR prgmGeometri folgt L'' und S(12 | 11 | 1)



Variante III:

Aufsuchen des Lotfußpunktes T von L auf Ɛ. Anschließend wird S als Lotfußpunkt von L'' auf Ɛ ermittelt und anschließend L'' selbst bestimmt. Mit GTR prgmGeometri folgt T(0 | 1 | 11) und der Rest ergibt sich durch einfache Vektoraddition.

3 Dieser Ausdruck ist nicht ganz zutreffend. Der zu spiegelnde Punkte ist immer L, besser sollte es heißen: „Wahl einer Variante“.



Ansatz für Koordinaten des Spiegelpunktes: S

Koordinaten des Spiegelpunktes: L"(12 | 20 | 10)

Gleichung einer Geraden des reflektierten Strahles: $g_{\overline{RL''}}: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ 4 \end{pmatrix}$

Ansatz für Koordinaten des Punktes des Kontrollsensors:

$$g_{\overline{RL''}}: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 13 \\ z \end{pmatrix} \quad \Rightarrow t = \tfrac{1}{2} \text{ und}$$

Koordinaten des Punktes des Kontrollsensors: K (9 | 13 | 8)

c) ein Richtungsvektor

Ansatz für zweiten Richtungsvektor

Koordinaten des zweiten Richtungsvektors

Ansatz für Gleichung der Ebene

Gleichung der Ebene und Nachweis

mit dem bereits ermittelte Wert von $E_{h\alpha}$ (↑Abbildung 15) ist der Nachweis leicht:

Es ist zu zeigen, dass F_h, G_h, $E_{h\alpha} \in \mathcal{E}$ gilt.

Zum Beispiel gilt $E_{h\alpha} \in \mathcal{E}$ weil $(8 - 4\cos\alpha) \cdot \sin\alpha + (h + 4\sin\alpha) \cdot \cos\alpha = 8\sin\alpha + h\cos\alpha$ zu einer wahren Aussage führt.