verwendeter GTR: ***Casio CFX-9850G***

Teil A Analysis

geg.: $f_a(x) = ax^2\left(1 - \ln\frac{x^2}{a}\right)$ und $f_a''(x) = -2a\left(\ln\frac{x^2}{a} + 2\right)$

a) - Angabe des größtmöglichen Definitionsbereiches von f_a

Beschränkungen durch enthaltene elementare Funktionen:

$\ln\frac{x^2}{a} \overset{def.}{\Leftrightarrow} \frac{x^2}{a} > 0 \Leftrightarrow |x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

Beschränkungen durch Zusammensetzungsarten: keine

$D_f: \quad x \in R, x \neq 0$

- Bestimmung der Nullstellen

$$f_a(x_N) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1.\ 0 = ax_N^2 \Leftrightarrow x_N = 0 \text{ entfällt wegen Def.-ber.} \\ 2.\ 0 = 1 - \ln\frac{x_N^2}{a} \Leftrightarrow 1 = \ln\frac{x_N^2}{a} \Leftrightarrow e = \frac{x_N^2}{a} \Leftrightarrow |x_N| = \sqrt{ea} \Leftrightarrow \begin{cases} 1.\ x_{N1} = -\sqrt{ea} \\ 2.\ x_{N2} = \sqrt{ea} \end{cases} \end{cases}$$

- Nachweis der Symmetrie des Graphen

$f_a(-x) = a(-x)^2\left(1 - \ln\frac{(-x)^2}{a}\right) = ax^2\left(1 - \ln\frac{x^2}{a}\right) = f_a(x) \Rightarrow f_a$ symmetrisch zur y-Achse

- Berechnung und Nachweis der lokalen Extrempkte

(A) Berechnung der Extremstellen mit der notwendigen Bedingung $f_a'(x_E) = 0$

Bestimmung der 1. Ableitung

$$f_a'(x) = 2ax\left(1 - \ln\frac{x^2}{a}\right) + ax^2\left(0 - \frac{a}{x^2}\cdot\frac{2x}{a}\right) = 2ax\left(1 - \ln\frac{x^2}{a}\right) - ax^2\cdot\frac{a}{x^2}\cdot\frac{2x}{a} = 2ax\left(1 - \ln\frac{x^2}{a} - 1\right) =$$

$$= -2ax\ln\frac{x^2}{a}$$

$$f_a'(x_E) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1.\ 0 = 2ax_E \Leftrightarrow x_E = 0 \text{ entfällt wegen Def.-ber.} \\ 2.\ 0 = \ln\frac{x_E^2}{a} \Leftrightarrow e^0 = \frac{x_E^2}{a} \Leftrightarrow |x_E| = \sqrt{a} \Leftrightarrow \begin{cases} 1.\ x_{E1} = -\sqrt{a} \\ 2.\ x_{E2} = \sqrt{a} \end{cases} \end{cases}$$

(B) Nachweis der Existenz und Art der Extrema

$f_a''(-\sqrt{a}) = -2a\left(\ln\frac{a}{a} + 2\right) = -4a \overset{a>0}{<} 0 \Rightarrow f_a$ besitzen bei $x_{E1} = -\sqrt{a}$ ein lokales Maximum

$f_a''(\sqrt{a}) = -2a\left(\ln\frac{a}{a} + 2\right) = -4a \overset{a>0}{<} 0 \Rightarrow f_a$ besitzen bei $x_{E2} = -\sqrt{a}$ ein lokales Maximum

(C) Berechnung der y-Koordinate des Extrempunktes

$f_a(-\sqrt{a}) = a \cdot a\left(1 - \ln\frac{a}{a}\right) = a^2 \Rightarrow \boxed{H_1(-\sqrt{a}; a^2)}$ und wegen Symmetrie $\boxed{H_2(\sqrt{a}; a^2)}$

b) Der Graph der Funktion besteht aus 2 stetigen Teilgraphen, die jeweils nur ein lokales Maximum besitzen. D.h. das lokale Maximum ist gleichzeitig auch globales Maximum jedes Teilgraphen. Es gilt: $W_f: y \in R, y \leq y_E = a^2$

$y \leq 1 = a^2 \Leftrightarrow a = 1$

c) Aufstellung der Ortskurve der Wendepunkte

Berechnung der Wendestellen

$f_a''(x_W) = 0 \Leftrightarrow 0 = \ln\frac{x_W^2}{a} + 2 \Leftrightarrow -2 = \ln\frac{x_W^2}{a} \Leftrightarrow e^{-2} = \frac{x_W^2}{a} \Leftrightarrow a = e^2 x_W^2$

Ersetzung des Parameters in der Funktionagleichung

$$f_{a=e^2x_W^2}(x_W)=e^2x_W^2\cdot x_W^2\left(1-\ln\frac{x_W^2}{e^2x_W^2}\right)=e^2x_W^4(1-(-2))=3e^2x_W^4\Rightarrow\boxed{h(x)=3e^2x^4}$$

d) Nachweis, dass F_1 Stammfunktion von f_1

$$F_1'(x)=\frac{1}{9}\left(3x^2(5-3\ln x^2)+x^3\left(0-\frac{3}{x^2}\cdot 2x\right)\right)=\frac{1}{9}(15x^2-9x^2\ln x^2-6x^2)=\frac{1}{9}(9x^2-9x^2\ln x^2)=$$

$$=x^2(1-\ln x^2)=f_1(x)$$

Angabe des Inhaltes der beschriebenen Fläche in Abhängigkeit von z

$$A=\int_{x=z}^{x=1}f_1(x)dx=[F_1(x)]_z^1=\frac{1}{9}\left[1\cdot\left(5-\underbrace{3\ln 1}_{=0}\right)-z^2(5-3\ln z^2)\right]=\frac{1}{9}(5-z^2(5-3\ln z^2))=A(z)$$

Berechnung des Flächeninhaltes für $z=e^{-1}$

GTR $A(e^1)=\int_{e^{-1}}^{1}f_1(x)dx\approx 0{,}49FE$

e) Berechnung des Volumens eines Rotationskörpers

$$V_R=\pi\int_{0,5}^{\sqrt{e}}f_1(x)dx\overset{GTR}{\approx}2{,}29VE$$

f) Aufstellung einer allgemeinen Tangentengleichung am Graphen von f_1

$x_B=u$

$y_B=f_1(x_B)=u^2(1-\ln u^2)$

$m_{t:f_1,x_B}=f_1'(x_B)=-2u\ln u^2$

Tangentengleichung in Punkt-Richtungs-Form:

$t_{f_1,x_B=u}:\quad y-u^2(1-\ln u^2)=-2u\ln u^2(x-u)$

Umwandlung in explizite Form

$t_{f_1,x_B=u}:\quad y=-2u\ln u^2\cdot x+2u^2\ln u^2+u^2-u^2\ln u^2=-2u\ln u^2+u^2(1+\ln u^2)$

Stammfkt von f_1 mit Regel für verkettete Fktn mit linearer innerer Funktion

$$\text{g}\,f(x)=a(mx+n)\Rightarrow F(x)=\frac{1}{m}A(mx+n):F_1(x)=-\frac{1}{k}e^{1-kx}$$

Ableitung der Fkt f_2:

Bestimmung derjenigen u_g für die gilt:

(1) zugehörige Tangente schneidet negative y-Achse: $y_n(u_g)=t_{f_1,u}(0)<0$

$$y_n-u_g^2(1-\ln u_g^2)=-2u_g\ln u_g^2(0-u)=2u_g^2\ln u_g^2\Leftrightarrow y_n(u_g)=u_g^2(1+\ln u_g^2)<0\Leftrightarrow$$

$$\overset{u_g^2>0}{\Leftrightarrow}1+\ln u_g^2<0\Leftrightarrow\ln u_g^2<-1\Leftrightarrow u_g^2<e^{-1}\Leftrightarrow|u_g|<\frac{1}{\sqrt{e}}\overset{u_g>0}{\Leftrightarrow}u_g<\frac{1}{\sqrt{e}}$$

(2) zugehörige Tangente schneidet positive x-Achse: $x_n(u_g)<0$ wobei $t_{f_1,u}(x_n(u_g))=0$

$$0-u_g^2(1-\ln u_g^2)=-2u_g\ln u_g^2(x_n-u_g)\Leftrightarrow x_n=\frac{u_g^2-u_g^2\ln u_g^2}{2u_g\ln u_g^2}+u_g=\frac{u_g^2+u_g^2\ln u_g^2}{2u_g\ln u_g^2}=\frac{y_n}{2u_g\ln u_g^2}$$

$y_n<0, u_g>0, \ln u_g^2<0\Rightarrow x_n(u_g)>0$

aus (1) und (2) folgt: $0<u_g<\frac{1}{\sqrt{e}}$

Teil B Geometrie / Algebra

gegeben $A(3;-1;-5)$, $B(1;5;-2)$, $C(-2;2;1)$, $g_a:\vec{x}=\begin{pmatrix}a\\1\\-7\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}5\\-3\\-6\end{pmatrix}\quad(a\in R, t\in R)$

a) - Begründung, dass kein Punkt existiert, der auf allen Geraden g_a liegt

(1) alle Geraden g_a haben gemeinsamen Richtungsvektor, d.h. sie liegen parallel oder sind identisch

(2) für unterschiedliche a haben alle Geraden g_a unterschiedliche Stützvektoren, d.h. die Geraden sind nicht identisch

Aus (1) und (2) folgt, dass die Geraden g_a eine Schar parallel liegender Geraden bilden. Es existiert also kein Punkt, der auf 2 verschiedenen Geraden der Schar liegt und erst recht keiner, der auf allen Geraden liegt.

- Untersuchung, ob eine Gerade existiert, auf der der Punkt B liegt

Punktprobe für B

$$\begin{array}{rccl} 1 = & a & +5t_x & \\ 5 = & 1 & -3t_y & \Rightarrow t_y = -\dfrac{4}{3} \overset{t_y \neq t_z}{\Rightarrow} B \notin g_a \\ -2 = & -7 & -6t_z & \Rightarrow t_z = -\dfrac{5}{6} \end{array}$$

- Nachweis, dass g_a windschief zur x-Achse

Geradengl. der x-Achse: $a_x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(1) Es existiert kein k mit $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. D.h. Richtungsvektoren g_a und a_x linear unabhängig, d.h. g_a, a_x nicht parallel oder identisch.

(2) Gleichungssystem $\begin{array}{rccl} r = & a & +5t & \\ 0 = & 1 & -3t & \Rightarrow t = \dfrac{1}{3} \\ 0 = & -7 & -6t & \Rightarrow t = -\dfrac{7}{6} \end{array}$ nicht lösbar. D.h. g_a und a_x schneiden sich nicht.

Aus (1) und (2) folgt, dass g_a und a_x windschief zueinander liegen.

b) Berechnung der Länge der Strecke $\overline{D_O D_A}$ die bei senkrechter Parallelprojektion der Strecke $\overline{OA}$ in die Ebene E entsteht

Lösungsgedanke: Senkrechte Parallelprojektion heißt, dass die Bildpunkte Durchstoßpunkte von Geraden sind, die senkrecht zur Projektionsebene durch die Originalpunkte verlaufen.

- Aufstellung der Gleichung der Ebene E in der alle Geraden g_a liegen

z.B. mit $P_0; RV1; RV2$ wobei $RV_1 \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$; $a = 0 : P_0(0;1;-7); a = 1 : P_1(1;1;-7) \Rightarrow RV_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$E: \quad 2y - z = 9$

- Richtungsvektor der Projektionsgeraden ist damit der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

- Aufstellung der Projektionsgeraden

für den Punkt A: $h_A : \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; für den Punkt O: $h_O : \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

- Berechnung der Koordinaten der Durchstoßpunkte (GTR-Programm)

$DSPkt(h_A;E): \quad D_A(3;1,4;-6,2)$; $DSPkt(h_O;E): \quad D_O(0;3,6;-1,8)$

- Berechnung der Länge der Strecke (GTR-Programm): $\overline{D_O D_A} = 5,76 LE$

c) - Nachweis, dass eine der Teilflächen ein Trapez ist

Ein Viereck wird als Trapez bezeichnet, wenn es ein paralleles Seitenpaar besitzt.

- Aufstellung der Seitenvektoren des Dreiecks

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}1-3\\5+1\\-2+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\6\\3\end{pmatrix};\ \overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}-2-1\\2-5\\1+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-3\\3\end{pmatrix};\ \overrightarrow{CA}=\begin{pmatrix}3+2\\-1-2\\-5-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-3\\-6\end{pmatrix}:\ \overrightarrow{CA}=RV_{g_5}\Rightarrow g_5\,\|\,\overline{CA}$$

- Nachweis, dass g_5 die Seiten $\overline{BA}$ und $\overline{BC}$ schneidet

$$g_5:\quad \vec{x}=\begin{pmatrix}5\\1\\-7\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}5\\-3\\-6\end{pmatrix};\ g_{BA}:\quad \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\5\\-2\end{pmatrix}+m\begin{pmatrix}2\\-6\\-3\end{pmatrix};\ g_{BC}:\quad \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\5\\-2\end{pmatrix}+n\begin{pmatrix}-3\\-3\\3\end{pmatrix}$$

Schnittverhalten g_5, g_{AB}

$$\begin{array}{rrrr}
5 & +5t = & 1 & +2m\\
1 & -3t = & 5 & -6m\\
-7 & -6t = & -2 & -3m\\
\hline
 & 4 = & 2m & -5t\\
 & -4 = & -6m & +3t \quad \Leftrightarrow m=\frac{1}{3};t=-\frac{2}{3}\\
 & -5 = & -3m & +6t \quad \text{Kontrolle}: -5=-5
\end{array}$$

D.h. die Gerade g_5 schneidet die Strecke $\overline{AB}$ im Punkt D bei $\frac{1}{3}$ $\left(\overline{BD}=\frac{1}{3}\overline{BA}\right)$.

Schnittverhalten g_5, g_{BC}

$$\begin{array}{rrrr}
5 & +5t = & 1 & -3n\\
1 & -3t = & 5 & -3n\\
-7 & -6t = & -2 & 3n\\
\hline
 & 4 = & -3n & -5t\\
 & -4 = & -3n & +3t \quad \Leftrightarrow n=\frac{1}{3};t=-1\\
 & -5 = & 3n & +6t \quad \text{Kontrolle}: -5=-5
\end{array}$$

D.h. die Gerade g_5 schneidet die Strecke $\overline{BC}$ im Punkt E bei $\frac{1}{3}$ $\left(\overline{BE}=\frac{1}{3}\overline{BC}\right)$.

D.h. die Gerade g_5 zerlegt das Dreieck in die beiden Teilflächen BDE und ADEC, wobei die Fläche ADEC ein Trapez bildet.

- Ermittlung des Verhältnisses der Flächeninhalte

$$A_{ABC}=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\sin(\angle ABC)$$

$$A_{BDE}=\frac{1}{2}\overline{BD}\cdot\overline{BE}\cdot\sin(\angle ABC)=\frac{1}{2}\frac{1}{3}\overline{AB}\cdot\frac{1}{3}\overline{BC}\cdot\sin(\angle ABC)=\frac{1}{9}A_{ABC}$$

$$A_{ADEC}=A_{ABC}-A_{BDE}=\frac{8}{9}A_{ABC}$$

$$A_{BDE}:A_{ADEC}=\frac{1}{9}A_{ABC}:\frac{8}{9}A_{ABC}=1:8$$

d) Untersuchung der Lagebeziehung der Geraden g_a und g_{AC}

$$g_{AC}:\quad \vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}+l\begin{pmatrix}5\\-3\\-6\end{pmatrix}$$

Diese Gerade hat den gleichen RV wie die Geraden g_a. D.h. sie liegt parallel zur Geradenschaar. Erfüllt der Punkt A die Ebenengl. E, dann ist g_{AC} eine der Gerden g_a.

$2\cdot 2-1=3\neq 9\Rightarrow g_{AC}\notin E\Rightarrow g_{AC}$ ist parallel zur den Geraden g_a den identisch

Beschreibung einer Vorgehensweise zur Ermittlung derjenigen g_{a_E} für die der Abstand der Geraden g_{AC} und g_{a_E} minimal wird

<u>Variante 1</u>

Da alle Geraden in der Ebene E liegen, berechnet man den Lotfußpunkt eines beliebige Punktes der Geraden g_{AC} in der Ebene E. (z.B. Punkt A).

Durch Einsetzen dieses Punktes in die Geradengl. g_{a_E} ermittelt man den zugehörigen Wert für a_E und stellt die Geradengleichung auf.

<u>Variante 2</u>

L_a bezeichne den Lotfußpunkt des Punktes A auf der Geraden g_a und $\vec{a}$ den Richtungsvektor dieser Geraden.

Die Extremgröße ist dann der Abstand des Punktes A vom jeweiligen Lotfußpunkt $d = \left|\overrightarrow{AL_a}\right|$. Die Extremgröße ist von den beiden Parametern a und t abhängig $(d = d(a,t))$.

Die Bedingung $\overrightarrow{AL_a} \cdot \vec{a} = 0$, die für den Lotfußpunkt erfüllt sein muss, kann zur Eliminierung von t aus der Gleichung der Extremgröße verwendet werden $(d = d(a))$.

Berechnung des lokalen Minimums der Extremgröße $(\Rightarrow a_E)$.

Verwendung dieses Ergebnisses zur Aufstellung der Gleichung der gesuchten Geraden.

Teil C Stochastik

a) ZEa1 ... Auswahl eines defekten Stoßdämpfers und Feststellung, welchen Fehler er aufweist

Es gibt 3 mögliche Fehler, die sich gegenseitig ausschließen. D.h.:

$F1$ ... Fehler 1 tritt auf $\qquad P(F1) = 0{,}7$

$F2$ ... Fehler 2 tritt auf $\qquad P(F2) = 0{,}15$

1. $F1 \cup F2 \cup F3 = \Omega \Rightarrow P(F1) + P(F2) + P(F3) = 1$
2. $F1 \cap F2 = \varnothing \Rightarrow P(F1 \cap F2) = 0 \Rightarrow P(F1 \cup F2) = P(F1) + P(F2)$

daraus ergibt sich für

$F3$ ... Fehler 3 tritt auf $\qquad P(F3) = 1 - (P(F1) - P(F2)) = 0{,}15$

ZEa2 ... Untersuchung eines defekten Stoßdämpfers und Feststellung ob er Geräusche verursacht

BERNOULLI-Experiment mit den Ereignissen

g ... Geräusche treten auf $\qquad$ Wahrscheinlichkeit unbekannt

$\overline{g}$ ... Geräusche treten nicht auf $\qquad P(e) = 1 - P(\overline{g})$

bekannt sind folgende bedingten Wahrscheinlichkeiten

Geräusche treten auf, wenn Fehler 1 vor liegt $\qquad P_{F1}(g) = 0{,}9$

Geräusche treten auf, wenn Fehler 2 vor liegt $\qquad P_{F2}(g) = 0{,}5$

Geräusche treten auf, wenn Fehler 3 vor liegt $\qquad P_{F3}(g) = 0$

Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass ein Geräusche verursachender Stoßdämpfer den Fehler aufweist. D.h. gesucht ist $P_g(F1)$

nach Pfadregel gilt: $P(F1 \cap g) = P_{F1}(g) \cdot P(F1) = P(g) \cdot P_g(F1) \Leftrightarrow P_g(F1) = \dfrac{P(F1) \cdot P_{F1}(g)}{P(g)}$

In dieser Beziehung ist die Wahrscheinlichkeit $P(g)$ unbekannt. Auf Grund der Bedingungen 1. und 2. und der Kenntnis der bedingten Wahrscheinlichkeiten, kann diese Wahrscheinlichkeit mit der Beziehung der totalen Wahrscheinlichkeit berechnet werden:

$P(g) = P_{F1}(g)P(F1) + P_{F2}(g)P(F2) + P_{F2}(g)P(F2)$

$$P_g(F1) = \frac{P(F1)P_{F1}(g)}{P_{F1}(g)P(F1) + P_{F2}(g)P(F2) + P_{F2}(g)P(F2)} = \frac{0{,}7 \cdot 0{,}9}{0{,}7 \cdot 0{,}9 + 0{,}15 \cdot 0{,}5 + 0{,}15 \cdot 0} \approx 0{,}8963$$

b) Berechnung der zu erwartenden Reparaturkosten

Anmerkung: *Gesucht sind hier die Reparaturkosten, die zu erwarten sind, wenn ein Stoßdämpfer Geräusche verursacht und nicht die allgemein bei defektem Stoßdämpfer zu erwartenden Reparaturkosten! Die Formulierung der Aufgabe ist meines Erachtens missverständlich.*

Zufallsgröße K beschreibt die zu erwartenden Reparaturkosten, wenn an einem Stoßdämpfer Geräusche auftreten.

Ereignis	Fehler 1 tritt auf	Fehler 2 tritt auf	Fehler 3 tritt auf
Wahrscheinlichkeit	$P_g(F1) = 0{,}8936$	$P_g(F2) = 0{,}1064$ Ber. analog F1	$P_g(F3) = 0$
Wert der ZG	400	200	100

$E(K) = K(F1) \cdot P_g(F1) + K(F2) \cdot P_g(F2) + K(F3) \cdot P_g(F3) = 378{,}72€$

c) ZEc1 ... Untersuchung eines Fahrzeuges mit Stoßdämpferschaden und Feststellung, b es Fehler 1 aufweist oder nicht

BERNOULLI-Experiment mit den Ereignissen

$F1$ ... Fehler 1 tritt auf $\qquad P(F1) = 0{,}7$

$\overline{F1}$ ... Fehler 1 tritt nicht auf $\qquad P(\overline{F1}) = 1 - P(F1) = 0{,}3$

Im Durchschnitt fallen pro Woche 25 defekte Stoßdämpfer an.

ZEc25 ... 25malige Nacheinanderausführung von ZEb1

Die Zufallsgröße C gibt die bei 25maliger Ausführung auftretenden Fälle von Fehler F1 an. ZG C ist dann binomialverteilt mit den Parametern Kettenlänge $n = 25$ und Erfolgswahrscheinlichkeit $p = P(F1) = 0{,}7$.

Gesucht ist derjenige Wert k_g für den gilt:

$P(C \le k_g) \ge 0{,}9$

$P(C \le 19) = 0{,}8065; \quad P(C \le 20) = 0{,}9095$

Für $k_g = 20$ wird erstmalig ein Wahrscheinlichkeit größer als 0,9 erreicht. D.h. es sollten mindestens 20 Teile vorrätig sein.

d) ZEd ... Auswahl eines Stoßdämpfers aus der Lagerhalle und Feststellung, von welcher Maschine er gefertigt wurde

Da von allen Maschinen gleiche Produktionsanteile geliefert werden, kann bei diesem Experiment mit der klassischen Wahrscheinlichkeit gerechnet werden.

Ereignis D ... bei viermaligen Wiederholen von ZEd werden Stoßdämpfer von 4 unterschiedlichen Maschinen entnommen

$$P(D) = \frac{6}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{6!}{2! \cdot 6^4} = 0{,}2778$$

Eingabe: Erwartungswert 1000; Standardabweichung 100, min. Erfolge 950, max. Erfolge 1050
Ausgabe: gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\boxed{P(950 \le Xc \le 1050) \approx 0{,}3829}$$

e) Die Zufallsgröße Xe beschreibt die Laufleistung eines Stoßdämpfers.

Xe ist normalverteilt mit einem Erwartungswert $\mu = 50000$ und einer Standardabweichung $\sigma = 10000$.

Ereignis E ... Stoßdämpfer hält weniger als 90% der durchschnittlichen Laufleistung

Berechnung der Wahrscheinlichkeit mit GTR-Programm

Eingabe: Erwartungswert 50000; Standardabweichung 10000, min. Erfolge 0, max. Erfolge $0{,}9 \cdot 10000$

Ausgabe: gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\boxed{P(E) = P(0 \le Xe \le 0{,}9 \cdot \sigma) \overset{GTR}{=} 0{,}3085}$$

Teil D1 — Wahlaufgabe Analysis

geg.: $\quad y = f_p(x) = \frac{p}{4}x^4 - 3x^2 + p \quad (p \in R, P > 0)$

a) - Angabe der Parameter für die abgebildeten Funktionen

Der Parameter ist gleich der Schnittstelle mit der y-Achse $(f_p(0) = p)$. Die abgebildeten Funktionen haben demnach die Werte $p = 1;2;4;6$

- Untersuchung der Symmetrie des Graphen

au symmetrisch zur y-Achse

b) Ermittlung aller Werte p, für die der Graph der Funktion und die x-Achse im I. und II. Quadranten eine Fläche vollständig begrenzen

- Die Funktion f_p besitzt für alle p den Definitionsbereich $D_f : x \in R$

- Bestimmung des Schnittverhaltens mit der x- Achse in Abhängigkeit von p

$f_p(x_N) = 0 = \frac{p}{4}x_N^4 - 3x_N^2 + p \qquad$ Substitution: $x_N^2 = s$

$$0 = s^2 - \frac{12}{p}s + 4 \Leftrightarrow s_{1,2} = \frac{6}{p} \mp \sqrt{\frac{36}{p^2} - \frac{4p^2}{p^2}} = \frac{6 \mp 2\sqrt{9-p^2}}{p} = \frac{6 \mp 2\sqrt{(3+p)(3-p)}}{p}$$

wegen $p > 0$ gilt: $\sqrt{(3+p)(3-p)}$ genau $\begin{cases} \text{zwei Lösungen für } 0 < p < 3 \Rightarrow \text{genau 4 Nullstellen} \\ \text{eine Lösung für } p = 3 \Rightarrow \text{genau zwei Nullstellen} \\ \text{keine Lösung für p} > 3 \Rightarrow \text{keine Nullstelle} \end{cases}$

D.h. für $0 < p \leq 3$ existiert eine solche Fläche.

Angabe der Nullstellen

$$s_1 = \frac{6 + 2\sqrt{(3+p)(3-p)}}{p} \overset{s=x_N^2}{\Rightarrow} x_{N1} = -\sqrt{\frac{6 + 2\sqrt{(3+p)(3-p)}}{p}}; x_{N4} = \sqrt{\frac{6 + 2\sqrt{(3+p)(3-p)}}{p}}$$

$$s_2 = \frac{6 - 2\sqrt{(3+p)(3-p)}}{p} \Rightarrow x_{N2} = -\sqrt{\frac{6 - 2\sqrt{(3+p)(3-p)}}{p}}; x_{N3} = \sqrt{\frac{6 - 2\sqrt{(3+p)(3-p)}}{p}}$$

Begründung, dass die Fläche immer im I. und II. Quadranten (d.h. oberhalb der x-Achse) liegt:
Da f_p die y-Achse immer bei $y_N = p$ schneidet, f_p auf R stetig ist und $p > 0$ gilt, muss der Graph von f_p im Bereich $x_{N2} \leq x \leq x_{N3}$ positive Werte annehmen.

-Berechnung des Flächeninhaltes für A_3

$$A_3 = \int_{x_{N2} = -\sqrt{\frac{6-\sqrt{(3+3)(3-3)}}{3}} = -\sqrt{2}}^{x_{N3} = +\sqrt{2}} f_3(x)dx \quad = 4{,}53FE$$

- Begründung, dass A_3 die größtmögliche dieser Fläche ist

Für $p = 3$ wird das größtmögliche Integrationsintervall verwendet. Außerdem werden für dieses p auch die größtmöglichen Werte erreicht (lok. Maximum bei $x = 0; f(0) = p$.

c) - Ermittlung der Ortskurve der lokalen Minima

Ermittlung der Art und der Koordinaten der lokalen Extrempunkte

(A) lokale Extremstellen

$$f_p'(x) = px^3 - 6x = x(px^2 - 6)$$

$$f_p'(x_E) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1.\ 0 = x_{E2} \\ 2.\ 0 = px_E^2 - 6 \Leftrightarrow |x_E| = \sqrt{\frac{6}{p}} \Leftrightarrow x_{E1} = -\sqrt{\frac{6}{p}}; x_{E3} = \sqrt{\frac{6}{p}} \end{cases}$$

(B) Nachweis der Art der Extrema

$$f_p''(x) = 3px^2 - 6$$

$$f_p''(x_{E1}) = 3p\frac{6}{p} - 6 = 12 < 0 \Rightarrow \text{lokales Minimum}$$

$$f_p''(x_{E2}) = 3p \cdot 0 - 6 = -5 > 0 \Rightarrow \text{ lokales Maximum}$$

$$f_p''(x_{E3}) = 3p\frac{6}{p} - 6 = 12 < 0 \Rightarrow \text{ lokales Minimum}$$

(C) Berechnung der y-Koordinaten

$$f_p(x_{E1}) = \frac{p}{4} \cdot \frac{36}{p^2} - 3\frac{6}{p} + p = \frac{9}{p} - \frac{18}{p} + p = p - \frac{9}{p} \qquad T_1\left(-\sqrt{\frac{6}{p}}; p - \frac{9}{p}\right)$$

$$f_p(x_{E2}) = p \qquad H(0;p)$$

$$f_p(x_{E3}) = f(x_{E1}) \qquad T_2\left(-\sqrt{\frac{6}{p}}; p - \frac{9}{p}\right)$$

Ermittlung der Ortskurve h der lok. Min.

Verwendung der Beziehung $0 = px_E^2 - 6 \Leftrightarrow p = \frac{6}{x_E^2}$ und $f(x_{E1}) = f(x_{E3})$

$$\frac{6}{x_E^2} - \frac{9x_E^2}{6} = \frac{6}{x_E^2} - \frac{3x_E^2}{2} \Rightarrow h(x) = \frac{6}{x^2} - \frac{3x^2}{2}$$

Teil D2 Wahlaufgabe Geometrie / Algebra

gegeben: $A(0;5;1)$, $B(0;-2;8)$, $C_a(2a;-3;-3)\,(a \in R; a > 0)$

a) - Aufstellung der Gl der Ebenengleichung

$$E: \quad \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{BC_a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + r'\begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2a \\ -1 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2a \\ -1 \\ -11 \end{pmatrix}$$

Umwandlung in parameterfreie Form

$$\begin{array}{llll|l}
x & & & = \quad\quad 2as & \\
 & y & & = \; 5 \; -r \; -s & 1 \\
 & & z & = \; 1 \; +r \; -11s & 1 \\
\hline
x & & & = \quad\quad 2as & 6 \\
 & y & & = \; 5 \; -r \; -s & \\
 & y & +z & = \; 6 \quad\; -12s & a \\
\hline
6x & & +a(y+z) & = \; 6a & \\
\hline
6x & +ay & az & = \; 6a &
\end{array}$$

- Nachweis der Schnittstelle mit der x-Achse $(y = z = 0)$

$6x + a \cdot 0 + a \cdot 0 = 6a \Leftrightarrow x = a \Rightarrow X_a(a;0;0)$

- Ermittlung des Volumens der Pyramide

Schnittstelle mit y-Achse $(x = z = 0)$: $Y_a(0;6;0)$

Schnittstelle mit z-Achse $(x = y = 0)$: $Z_a(0;0;6)$

$$V_{Py} = \frac{1}{3}A_G \cdot h \quad A_G = A_D = \frac{1}{2}a \cdot b \quad a = x_{X_a}; b = y_{Y_a}; h = z_{Z_a} \Rightarrow V_{Py} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}a \cdot 6 \cdot 6 = 6a$$

b) $A(x_A; y_A; z_A)$ bezeichne einen beliebigen Punkt auf der Ebene E

Berechnung desjenigen Parameters a_b, für den ein einbeschriebener Quader das Volumen 7VE hat und die Grundseiten jeweils die Länge 2.

$$V_Q = x_A \cdot y_A \cdot z_a = 7 \quad und \quad x_A = y_A = 2 \Rightarrow 6 \cdot 2 + a_b \cdot 2 + a_b \cdot z_a = 6a_b \Leftrightarrow z_a = \frac{4a_b - 12}{a_b}$$

$$7 = 2 \cdot 2 \cdot \frac{4a_b - 12}{a_b} \Leftrightarrow 7a_b = 16a_b - 48 \Leftrightarrow 9a_b = 48 \Leftrightarrow a_b = \frac{16}{3}$$

c) Berechnung desjenigen Parameters a_c, für den ein einbeschriebener Quader ein Würfel mit dem Volumen $\frac{125}{8}$ ist.

$$V_Q = x_A \cdot y_A \cdot z_a = V_W = \frac{125}{8}$$

$$x_A = y_A = z_A \Rightarrow 6 \cdot x_A + a_c \cdot x_A + a_c \cdot x_a = 2(3 + a_c)x_A = 6a_c \Leftrightarrow x_a = \frac{3a_c}{3 + a_c}$$

$$V_W = \left(\frac{3a_c}{3 + a_c}\right)^3 = \frac{125}{8} \Leftrightarrow \frac{3a_c}{3 + a_c} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 6a_c = 15 + 5a_c \Leftrightarrow a_c = 15$$

Angabe der oberen Grenze der Würfelvolumina

$$\lim_{a \to \infty} V_W = \lim_{a \to \infty}\left(\frac{3a}{3 + a}\right)^3 = \lim_{a \to \infty}\left(\frac{a}{a} \cdot \frac{3}{\frac{3}{a} + 1}\right)^3 = \left(\frac{3}{0 + 1}\right)^3 = 27$$