Schriftliche Abiturprüfung
Grundkursfach Mathematik

- Ersttermin -

Material für den Prüfungsteilnehmer

Allgemeine Arbeitshinweise

Ihre Arbeitszeit (einschließlich der Zeit für das Lesen der Aufgabentexte und der Zeit für die Auswahl der Wahlaufgabe) beträgt **240 Minuten.**

Auf dem Deckblatt der Arbeit haben Sie den verwendeten GTR-Typ anzugeben.

Die Prüfungsarbeit besteht aus den zu bearbeitenden **Pflichtteilen A**, **B** und **C** sowie dem **Wahlteil D**.
Es sind alle Aufgaben der Pflichtteile zu bearbeiten.
Aus dem Teil D ist **genau eine** der beiden Aufgaben zu bearbeiten.

Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionen) Hilfslinien muss deutlich erkennbar in gut lesbarer Form dargestellt werden.

Insgesamt sind 60 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar, davon

im Teil A	25 BE,
im Teil B	15 BE,
im Teil C	10 BE,
im Teil D	10 BE.

Erlaubte Hilfsmittel:
1 Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung
1 grafikfähiger, programmierbarer Taschenrechner (GTR) ohne Computer-Algebra-System
1 Tabellen- und Formelsammlung, ohne ausführliche Musterbeispiele (im Unterricht eingeführt)
Zeichengerät

Prüfungsinhalt

Pflichtaufgaben

Teil A: Analysis

Gegeben ist eine Funktion f mit der Gleichung $f(x) = 2x \cdot (x-3)^2 \quad (x \in R)$.

a) Geben Sie die Nullstellen, die Koordinaten und die Art der lokalen Extrempunkte sowie die Koordinaten des Wendepunktes der Funktion f an.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

b) Der Graph der Funktion f und die x-Achse begrenzen eine Fläche vollständig. Diese Fläche wird von der Geraden mit der Gleichung $y = 4$ in zwei Teilflächen zerlegt.
Ermitteln Sie das Verhältnis der Inhalte dieser beiden Teilflächen.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

c) Die Gerade g verläuft durch den Koordinatenursprung und den Punkt $P(2; f(2))$.
Eine Parallele zur y-Achse mit der Gleichung $x = c$ $(c \in R, 0 < c < 2)$ schneidet den Graphen der Funktion f im Punkt A und die Gerade g im Punkt B.
Ermitteln Sie den Wert c, für den die Länge der Strecke $\overline{AB}$ maximal wird.
Geben Sie diese maximale Streckenlänge an.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

d) Für jedes u $(u \in R, u > 0)$ begrenzen der Graph der Funktion f im Intervall $[0; u]$, die Gerade mit der Gleichung $x = u$ und die x-Achse eine Fläche vollständig.
Ermitteln Sie den Wert u, für den der Inhalt dieser Fläche 12 beträgt.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

e) Der lokale Maximumpunkt des Graphen der Funktion f wird an der Geraden mit der Gleichung $y = 2x \quad (x \in R)$ gespiegelt.
Berechnen Sie die Koordinaten des Spiegelpunktes.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

f) Für jedes a $(a \in R, a > 0)$ ist eine Funktion f_a mit der Gleichung
$f_a(x) = ax \cdot (x-3)^2 \quad (x \in R)$ gegeben.
Der Graph der Funktion f_a besitzt genau zwei lokale Extrempunkte. Die Gerade durch diese beiden Extrempunkte und die Koordinatenachsen begrenzen eine Dreiecksfläche vollständig.
Ermitteln Sie den Inhalt dieser Fläche in Abhängigkeit von a.

Erreichbare BE-Anzahl: 6

Teil B: Geometrie / Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(-5;\ 12;\ 13)$, $B(1;\ 4;\ 23)$ und $C(1;\ 4;\ 3)$ sowie für jedes a ($a \in R$) eine Gerade h_a durch die Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} -12 \\ a \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $(r \in R)$ gegeben.

Die Gerade g verläuft durch die Punkte A und B.

a) Zeigen Sie, dass die Punkte A, B und C Eckpunkte eines Dreiecks sind.
Weisen Sie nach, dass dieses Dreieck gleichschenklig und rechtwinklig ist.
Es existiert genau ein Punkt P derart, dass die Punkte A, B, C und P Eckpunkte eines Quadrats sind.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes P.

Erreichbare BE-Anzahl: 6

b) Alle Geraden h_a liegen in einer gemeinsamen Ebene.
Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Ebene in allgemeiner Form.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

c) Begründen Sie, dass keine der Geraden h_a zur Geraden g parallel ist.
Es existiert genau eine Gerade h_a, die die Gerade g in einem Punkt Q schneidet.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes Q.
Geben Sie die Größe des Schnittwinkels zwischen diesen beiden Geraden an.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

d) Der Punkt $S(-11;\ -5;\ 13)$ ist die Spitze einer geraden quadratischen Pyramide ABPCS.
Es existiert eine zweite gerade quadratische Pyramide ABPCS* mit der Grundfläche ABPC, die zur ersten Pyramide volumengleich ist.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes S*.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

Teil C: Stochastik

Ein elektrisches Gerät wird aus genau drei unterschiedlichen, voneinander unabhängig arbeitenden Bauteilen montiert. Das Bauteil 1 hat eine Fehlerquote von 5%, das Bauteil 2 von 2% und bei Bauteil 3 liegt die Fehlerquote bei 4%.

a) Der Produktion wird zufällig ein Gerät entnommen.
Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
Ereignis A: Beim zufällig entnommenen Gerät ist nur das Bauteil 3 fehlerhaft.
Ereignis B: Beim zufällig entnommenen Gerät sind genau zwei Bauteile defekt.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

b) Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der defekten Bauteile bei einem zufällig der Produktion entnommenen Gerät.
Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X an.
Es werden der Produktion zufällig 100 Geräte entnommen und überprüft.
Wie viele fehlerhafte Bauteile sind dabei zu erwarten?

Erreichbare BE-Anzahl: 3

Das elektrische Gerät funktioniert nur dann, wenn alle drei Bauteile fehlerlos sind. Durch Fehler bei der Montage kann allerdings das Zusammenwirken der Bauteile gestört und damit das Gerät nicht funktionstüchtig sein, so dass sich bei der Produktion dieses Gerätetyps insgesamt eine Ausschussquote von 12,5% ergibt.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einem Karton mit 15 Geräten aus dieser Produktion genau zwei Geräte Ausschuss sind.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

d) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer aus 100 Geräte dieser Produktion bestehenden Lieferung mindestens 85 Geräte funktionstüchtig sind.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

e) Wie viele Geräte dieses Typs muss ein Händler mindestens bestellen, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er wenigstens 50 funktionstüchtige Geräte erhält, größer als 90% ist?

Erreichbare BE-Anzahl: 1

Teil D: Wahlaufgaben

Wählen Sie genau eine der folgenden Aufgaben zur Bearbeitung aus.

Aufgabe D1: Analysis

Gegeben sind die Funktionen f und g durch die Gleichungen

$y = f(x) = 5 \cdot (e - e^{-x}) \quad (x \in R)$ und $y = g(x) = 5 \cdot (e^{x} - e) \quad (x \in R)$.

a) Zeigen Sie, dass gilt: $g(-x) = -f(x)$.
Interpretieren Sie diese Aussage geometrisch.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

b) Die beiden Schnittpunkte der Graphen der Funktionen f und g sind Eckpunkte eines achsenparallelen Rechtecks.
Bestimmen Sie den prozentualen Anteil der von den beiden Graphen eingeschlossen Fläche an der Fläche dieses Rechtecks.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

c) Zur Simulation des Wasserhaushalts einer Talsperre experimentieren Schüler mit einem Fass. Das Fass ist anfangs mit einer bestimmten Wassermenge gefüllt. Nun wird dem Fass einerseits gleichmäßig Wasser zugeführt und andererseits ein Loch im Boden geöffnet, so dass Wasser abläuft.
Dieser Prozess kann näherungsweise durch ein mathematisches Modell beschrieben werden, wobei das Wasservolumen V_k (in Volumeneinheiten) im Fass in Abhängigkeit von der Zeit t (in Zeiteinheiten) durch die Gleichung
$V_k(t) = k \cdot e - k \cdot e^{-t} \quad (t \geq 0)$ beschrieben wird. k (k>0) ist ein Parameter.
Im Folgenden sei das Anfangsvolumen des Wassers $V_k(0) = 8{,}6$.

Berechnen Sie für diesen Fall den Wert für k.

Ermitteln Sie, nach welcher Zeit sich im diesem Fall das 1,5-fache des Anfangsvolumens an Wasser im Fass befindet.

Ermitteln Sie, welches Fassungsvermögen dieses Fass mindestens haben muss, damit es nicht überläuft.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

.

Aufgabe D2: Geometrie/Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem ist für jedes a ($a \in R$) eine Gerade g_a durch $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2a \\ 4a \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4-a \\ 10-2a \\ -4 \end{pmatrix}$ $(t \in R)$ gegeben.

a) Untersuchen Sie die Lagebeziehung zwischen der Geraden $g_{-\frac{3}{4}}$ und der Geraden $g_{\frac{1}{2}}$.

Zeigen Sie, dass sich alle Geraden g_a in genau einem Punkt schneiden

Erreichbare BE-Anzahl: 4

b) Weisen Sie nach, dass keine Gerade g_a die x-y-Ebene orthogonal schneidet .

Alle Schnittpunkte S_a der Geraden g_a mit der x-y-Ebene liegen auf ein und derselben Geraden.
Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Geraden.

Es existiert genau eine Gerade g_a, für die der Schnittwinkel mit der x-y-Ebene maximal ist,
Ermitteln Sie für diese Gerade den Wert a.

Erreichbare BE-Anzahl: 6