Schriftliche Abiturprüfung – Grundkursfach – Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Aus rechtlichen Gründen möchte ich Sie darauf hinweisen, dass Sie sich auf einer **privaten** Seite befinden. Insbesondere ist dies **kein** Produkt des Sächsischen Staatsministeriums für Kultus, welches die Abituraufgaben entwickelt.

Dies ist die Abschrift der Prüfungsaufgaben 2003, wie sie vom Sächsischen Staatsministeriums für Kultus auf dem Sächsischen Schulserver (www.sachsen-macht-schule.de) veröffentlicht werden.

Außerdem sollten Sie folgendes wissen:

- Lösungen der Aufgaben können auf unterschiedlichen Wegen erreicht werden. Hier finden Sie VORSCHLÄGE zur Lösung und VORSCHLÄGE zur Bewertung, die nicht für die Bewertung Ihres Abiturs herangezogen werden können. Dafür ist jeder prüfende Fachlehrer verantwortlich.
- Ich habe versucht, den graphikfähigen Taschenrechner (GTR – hier TI 82/83/83+) besonders häufig einzusetzen. Damit sollen Möglichkeiten aufgezeigt werden, auch wenn eine Rechnung vielleicht schneller zum Ziel führen würde.
- Eingesetzte Programme finden Sie auf den Mathe-Seiten des sächsischen Schulservers unter www.sn.schule.de/~matheabi dokumentiert und anhand von vielen Beispielen erklärt. Insbesondere möchte ich auf eine zusammenfassende Broschüre zu diesem Thema verweisen: www.sn.schule.de/~matheabi/data/gtrZsfsg.pdf.
- Die **offiziellen** Abituraufgaben werden nach Beendigung der Prüfungsphase auf dem Sächsischen Schulserver veröffentlicht.
- Für Nachfragen und Ihre Hinweise stehe ich Ihnen gerne zur Verfügung: F. Müller (mathe@oskar-reime-gymnasium.de) – Mathe-Lehrer.
  Dieses Dokument wurde zuletzt aktualisiert am 09.06.03.
- Wenn Sie Fehler finden oder Ergänzungen haben, teilen Sie mir das bitte mit.

Material für den Prüfungsteilnehmer

Allgemeine Arbeitshinweise

Ihre Arbeitszeit (einschließlich der Zeit für das Lesen der Aufgabentexte und der Zeit für die Auswahl der Wahlaufgabe) beträgt **240 Minuten**.

Auf dem Deckblatt der Arbeit haben Sie den verwendeten GTR-Typ anzugeben.

Die Prüfungsarbeit besteht aus den zu bearbeitenden Pflichtteilen **A, B** und **C** sowie dem **Wahlteil D.**
Es sind alle Aufgaben der Pflichtteile zu bearbeiten.
Aus dem Teil D ist **genau eine** der beiden Aufgaben zu bearbeiten.
Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionen) Hilfslinien muss deutlich erkennbar in gut lesbarer Form dargestellt werden.

Bei Verwendung von GTR-Programmen ist anzugeben, aus welchen Eingabedaten das Programm welche Ausgabendaten berechnet.

Insgesamt sind 60 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar, davon
im Teil A 25 BE,
im Teil B 15 BE,
im Teil C 10 BE,
im Teil D 10 BE.

Erlaubte Hilfsmittel:

1 Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung
1 grafikfähiger, programmierbarer Taschenrechner (GTR) ohne Computer-Algebra-System
1 Tabellen- und Formelsammlung ohne ausführliche Musterbeispiele (im Unterricht eingeführt)
Zeichengeräte
beiliegende „Materialien für Aufgaben zur Stochastik“[1]

Bewertungsmaßstab

Pkte.	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
60 BE	60-58	57-55	54-52	51-49	48-46	45-43	42-40	39-37	36-34	33-31	30-28	27-25	24-21	20-17	16-13	12-0

Prüfungsinhalt

Pflichtaufgaben

Teil A: Analysis

Gegeben ist eine Funktion f mit der Gleichung $f(x) = 2x \cdot (x-3)^2$ ($x \in \mathbb{R}$).

a) Geben Sie die Nullstellen, die Koordinaten und die Art der lokalen Extrempunkte sowie die Koordinaten des Wendepunktes der Funktion f an. Erreichbare BE-Anzahl: 4

b) Der Graph der Funktion f und die x-Achse begrenzen eine Fläche vollständig.
Diese Fläche wird von der Geraden mit der Gleichung $y = 4$ in zwei Teilflächen zerlegt.
Ermitteln Sie das Verhältnis der Inhalte dieser beiden Teilflächen. Erreichbare BE-Anzahl: 4

c) Die Gerade g verläuft durch den Koordinatenursprung und den Punkt $P(2 \mid f(2))$.
Eine Parallele zu y-Achse mit der Gleichung $x = c$ ($c \in \mathbb{R}$, $0 < c < 2$) schneidet den Graphen der

1 Diese werden hier nicht wiedergegeben. Sie enthalten zumeist eine Tabelle zur Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Manchmal eine Tabelle zur Summenfunktion der Binomialverteilung. Beides kann durch Verwendung des GTR leicht ersetzt werden. Die Tabellen finden Sie im Inhalt der Online-Ausgabe dieses Textes www.sn.schule.de/~matheabi.

Funktion f im Punkt A und die Gerade g im Punkt B.
Ermitteln Sie den Wert c, für den die Länge der Strecke $\overline{AB}$ maximal wird.
Geben Sie diese maximale Streckenlänge an. Erreichbare BE-Anzahl: 3

d) Für jedes u ($u \in \mathbb{R}$, $u > 0$) begrenzen der Graph der Funktion f im Intervall [0; u], die Gerade mit der Gleichung $x = u$ und die x-Achse eine Fläche vollständig.
Ermitteln Sie den Wert u, für den der Inhalt dieser Fläche 12 beträgt. Erreichbare BE-Anzahl: 4

e) Der lokale Maximumpunkt des Graphen der Funktion f wird an der Geraden mit der Gleichung $y = 2x$ ($x \in \mathbb{R}$) gespiegelt.
Berechnen Sie die Koordinaten des Spiegelpunktes. Erreichbare BE-Anzahl: 4

f) Für jedes a ($a \in \mathbb{R}$, $a > 0$) ist eine Funktion f_a mit der Gleichung $f_a(x) = ax \cdot (x-3)^2$ ($x \in \mathbb{R}$) gegeben.
Der Graph der Funktion f_a besitzt genau zwei lokale Extrempunkte. Die Gerade durch diese beiden Extrempunkte und die Koordinatenachsen begrenzen eine Dreiecksfläche vollständig.
Ermitteln Sie den Inhalt dieser Fläche in Abhängigkeit von a. Erreichbare BE-Anzahl: 6

Teil B: Geometrie /Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(-5 | 12 | 13), B(1 | 4 | 23) und C(1 | 4 | 3) sowie für jedes a ($a \in \mathbb{R}$) eine Gerade h_a durch die Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} -12 \\ a \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ($r \in \mathbb{R}$) gegeben.
Die Gerade g verläuft durch die Punkte A und B.

a) Zeigen Sie, dass die Punkte A, Bund C Eckpunkte eines Dreiecks sind.
Weisen Sie nach, dass dieses Dreieck gleichschenklig und rechtwinklig ist.
Es existiert genau ein Punkt P derart, dass die Punkte A, B, C und P Eckpunkte eines Quadrats sind.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes P. Erreichbare BE-Anzahl: 6

b) Alle Geraden h_a liegen in einer gemeinsamen Ebene.
Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Ebene in allgemeiner Form. Erreichbare BE-Anzahl: 2

c) Begründen Sie, dass keine der Geraden ha zur Geraden g parallel ist.
Es existiert genau eine Gerade h_a, die die Gerade g in einem Punkt Q schneidet. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes Q.
Geben Sie die Größe des Schnittwinkels zwischen diesen beiden Geraden an.
Erreichbare BE-Anzahl: 4

d) Der Punkt S(-11 | - 5 | 13) ist die Spitze einer geraden quadratischen Pyramide ABPCS.
Es existiert eine zweite gerade quadratische Pyramide $ABPCS^*$ mit der Grundfläche ABPC, die zur ersten Pyramide volumengleich ist.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes S^*. Erreichbare BE-Anzahl: 3

Teil C: Stochastik

Ein elektrisches Gerät wird aus genau drei unterschiedlichen, voneinander unabhängig arbeitenden Bauteilen montiert. Das Bauteil 1 hat eine Fehlerquote von 5%, das Bauteil 2 von 2% und bei Bauteil 3 liegt die Fehlerquote bei 4%.

a) Der Produktion wird zufällig ein Gerät entnommen.
Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
Ereignis A: Beim zufällig entnommenen Gerät ist nur das Bauteil 3 fehlerhaft.
Ereignis B: Beim zufällig entnommenen Gerät sind genau zwei Bauteile defekt. Erreichbare BE-Anzahl: 2

b) Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der defekten Bauteile bei einem zufällig der Produktion entnommenen Gerät.
Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X an.
Es werden der Produktion zufällig 100 Geräte entnommen und überprüft.
Wie viele fehlerhafte Bauteile sind dabei zu erwarten? Erreichbare BE-Anzahl: 3

Das elektrische Gerät funktioniert nur dann, wenn alle drei Bauteile fehlerlos sind. Durch Fehler bei der Montage kann allerdings das Zusammenwirken der Bauteile gestört und damit das Gerät nicht funktionstüchtig sein, so dass sich bei der Produktion dieses Gerätetyps insgesamt eine Ausschussquote von 12,5% ergibt.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einem Karton mit 15 Geräten aus dieser Produktion genau zwei Geräte Ausschuss sind. Erreichbare BE-Anzahl: 2

d) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer aus 100 Geräte dieser Produktion bestehenden Lieferung mindestens 85 Geräte funktionstüchtig sind. Erreichbare BE-Anzahl: 2

e) Wie viele Geräte dieses Typs muss ein Händler mindestens bestellen, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er wenigstens 50 funktionstüchtige Geräte erhält, größer als 90% ist?
Erreichbare BE-Anzahl: 1

Teil D: Wahlaufgaben

Wählen Sie genau eine der folgenden Aufgaben zur Bearbeitung aus.

Aufgabe D 1: Analysis

Gegeben sind die Funktionen f und g durch die Gleichungen $y = f(x) = 5 \cdot (e-e^{-x})$ ($x \in \mathbb{R}$) und $y = g(x) = 5 \cdot (e^{x}-e)$ ($x \in \mathbb{R}$).

a) Zeigen Sie, dass gilt: $g(-x) = -f(x)$.
Interpretieren Sie diese Aussage geometrisch. Erreichbare BE-Anzahl: 2

b) Die beiden Schnittpunkte der Graphen der Funktionen f und g sind Eckpunkte eines achsenparallelen Rechtecks.
Bestimmen Sie den prozentualen Anteil der von den beiden Graphen eingeschlossen Fläche an der Fläche dieses Rechtecks. Erreichbare BE-Anzahl: 3

c) Zur Simulation des Wasserhaushalts einer Talsperre experimentieren Schüler mit einem Fass. Das Fass ist anfangs mit einer bestimmten Wassermenge gefüllt. Nun wird dem Fass einerseits gleichmäßig Wasser zugeführt und andererseits ein Loch im Boden geöffnet, so dass Wasser abläuft. Dieser Prozess kann näherungsweise durch ein mathematisches Modell beschrieben werden, wobei das Wasservolumen V_k (in Volumeneinheiten) im Fass in Abhängigkeit von der Zeit t (in Zeiteinheiten) durch die Gleichung $V_k(t)=k \cdot e - k \cdot e^{-t}$ ($t \geq 0$) beschrieben wird. k ($k>0$) ist ein Parameter. Im Folgenden sei das Anfangsvolumen des Wassers $V_k(0) = 8{,}6$.
Berechnen Sie für diesen Fall den Wert für k.
Ermitteln Sie, nach welcher Zeit sich im diesem Fall das 1,5-fache des Anfangsvolumens an Wasser im Fass befindet.
Ermitteln Sie, welches Fassungsvermögen dieses Fass mindestens haben muss, damit es nicht überläuft. Erreichbare BE-Anzahl: 5

Aufgabe D 2: Geometrie / Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem ist für jedes a ($a \in \mathbb{R}$) eine Gerade g_a durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2a \\ 4a \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4-a \\ 10-2a \\ -4 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ gegeben.}$$

a) Untersuchen Sie die Lagebeziehung zwischen der Geraden $g_{-\frac{3}{4}}$ und der Geraden $g_{\frac{1}{2}}$.
Zeigen Sie, dass sich alle Geraden g_a in genau einem Punkt schneiden Erreichbare BE-Anzahl: 4

b) Weisen Sie nach, dass keine Gerade g_a die x-y-Ebene orthogonal schneidet.
Alle Schnittpunkte S_a der Geraden g_a mit der x-y-Ebene liegen auf ein und derselben Geraden.
Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Geraden.
Es existiert genau eine Gerade g_a, für die der Schnittwinkel mit der x-y-Ebene maximal ist.
Ermitteln Sie für diese Gerade den Wert a. Erreichbare BE-Anzahl: 6

Lösungsvorschläge

Teil A

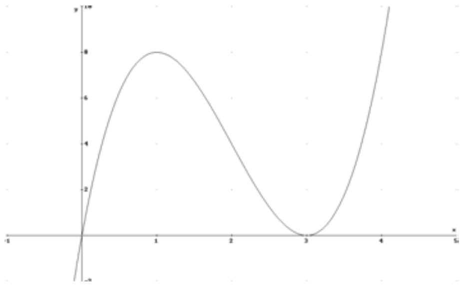


Abbildung 1: f(x)

a) Nullstellen: $x_{01} = 0$; $x_{02} = 3$
Koordinaten des lokalen Maximumpunktes: P_{MAX} (1 | 8)
Koordinaten des lokalen Minimumpunktes: P_{MIN} (3 | 0)
Koordinaten des Wendepunktes: P_W (2 | 4) 4 BE

b) Lösungsidee:

1. berechne großen Flächeninhalt
   $$A_g \underset{GTR}{=} \int_0^3 f(x)\,dx :$$
   `fnInt(f(x),x,Ø,3)` → 13,5
2. verschiebe f(x) um 4 nach unten: f(x) – 4 (in Abbildung 2 grün markiert)
3. bestimme dafür die Nullstellen (eine ist x_W):
   `solve(f(x)-4,x,Ø.3)` → 0.26795
4. berechne kleinen Flächeninhalt
   $$A_k \underset{GTR}{=} \int_{0.268}^{2} f(x)\,dx$$ (in Abbildung 2 blau markiert):
   `fnInt(f(x),x,Ø.268,2)` → 4,5
5. $\frac{A_k}{A_g} = \frac{1}{3}$ bzw. $\frac{A_k}{A_g - A_k} = \frac{1}{2}$, denn es ist ja nach dem Teilverhältnis der Teilflächen gefragt.

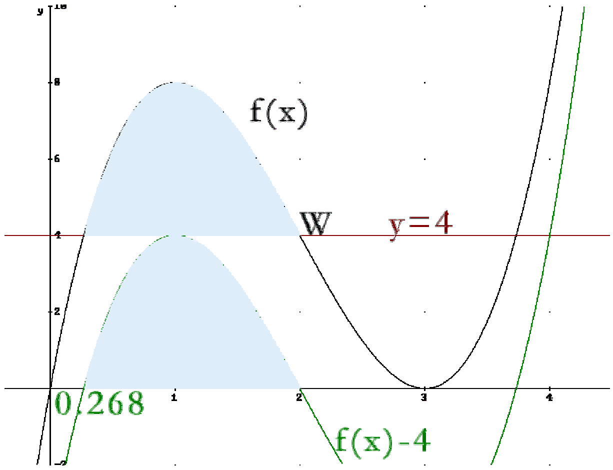
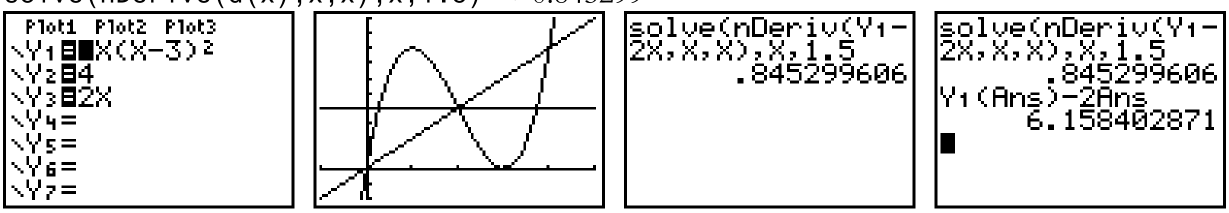


Abbildung 2

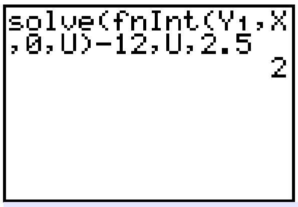
Abszissen der Schnittpunkte: $x_{S1} \approx 0{,}268$; $x_{S2} = 2$
Inhalt einer Teilfläche
Inhalt der anderen Teilfläche
Verhältnis der Inhalte beider Teilflächen, z. B.: 1:2 4 BE

c) Gleichung der Geraden g: y = 2x, denn n = 0 und m ergibt sich aus P(2 | 4)
Gleichung der Zielfunktion: d(x) = f(x) – 2x
und weiter mit GTR:
`solve(nDerive(d(x),x,x),x,1.5)` → 0.845299



Wert c und $\overline{AB}_{MAX}$: c ≈ 0,845; $\overline{AB}_{MAX} \approx 6{,}158$ 3 BE

d) Ansatz für Flächenberechnung: $\int_0^u f(x)\,dx = 12$ und die Aufgabenstellung erlaubt das Arbeiten mit GTR: `solve(fnInt(f(x),x,Ø,u)-12,u,2.5)` → 2



eine Stammfunktion der Funktion f
Ansatz für Wert u
Wert u: u = 2 4 BE

e) Gleichung der Senkrechten zur Spiegelgeraden durch P_{MAX}: m = -.5 und wegen (1 | 8) ∈ y = -.5x + n ⇒ n = 8,5 bzw. y = -.5x + 8.5
Koordinaten des Schnittpunktes der Spiegelgeraden mit der Senkrechten: $x_S = 3.4$ und $y_S = 6.8$
Abszisse des Spiegelpunktes: $x_{P'} = 5{,}8$
Ordinate des Spiegelpunktes: $y_{P'} = 5{,}6$ 4 BE

f) der Parameter a streckt/staucht die Kurve[2], deshalb sind ändern sich die Stellen der Extrema gegenüber f(x) nicht. Lediglich die Höhen (y-Werte) ändern sich: P_{MAX} (1 | 4a), P_{MIN} (3 | 0). Der Anstieg der Geraden ergibt sich nun aus $m = \frac{y_{MIN} - y_{MAX}}{x_{MIN} - x_{MAX}} = -2a$ und damit n = 6a. Die Achsenabschnitte stehen nun fest und A(a) = .5 ·3 ·6a
1.Ableitung
Extremstellen
Koordinaten der lokalen Extrempunkte
Ansatz für die Geradengleichung durch die Extrempunkte
Geradengleichung durch die Extrempunkte
Inhalt der Dreiecksfläche: A(a) = 9a 6 BE

25 BE

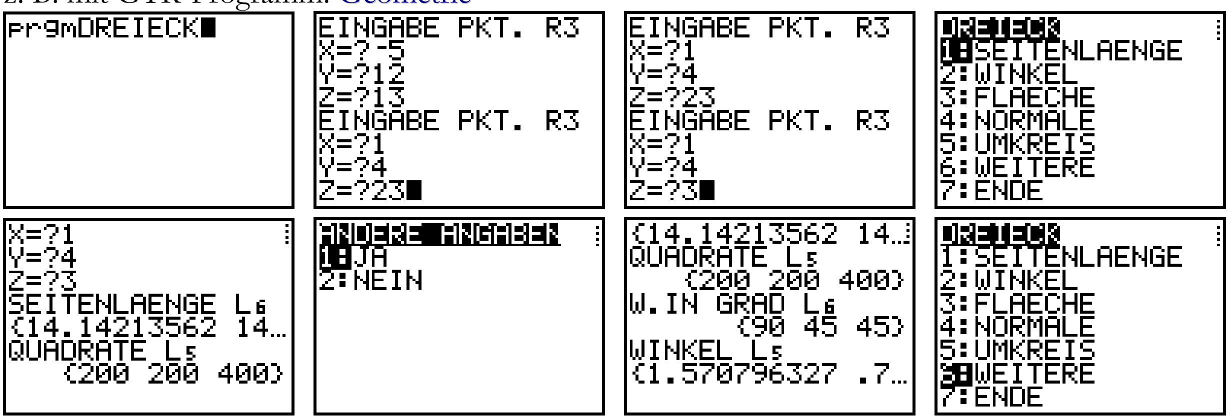
Teil B

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \\ 13 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 10 \end{pmatrix}$

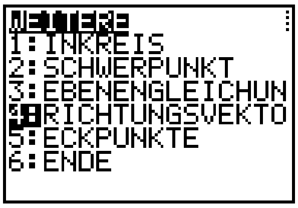
Ansatz für Nachweis: C ∉ g

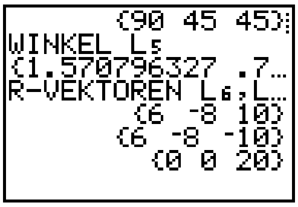
Nachweis, dass die Punkte A, B und C ein Dreieck bilden: $\begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ -10 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 10 \end{pmatrix}$ ist nicht lösbar

Nachweis der Gleichschenkligkeit: $\overline{AB} = \overline{CA}$
z. B. mit GTR-Programm: Geometrie



2 Ist a < 0 würde die Kurve außerdem noch an der x-Achse gespiegelt.





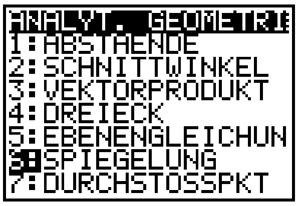
$\vec{AB}=\begin{pmatrix}6\\-8\\10\end{pmatrix}$; $c=\overline{AB}=\sqrt{200}$; $\measuredangle\gamma=45°$

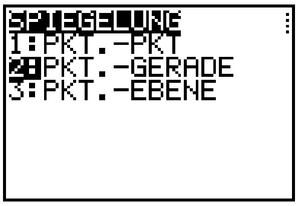
$\vec{BC}=\begin{pmatrix}0\\0\\20\end{pmatrix}$; $a=\overline{BC}=20$; $\measuredangle\alpha=90°$

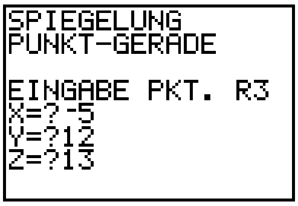
$\vec{CA}=\begin{pmatrix}6\\-8\\-10\end{pmatrix}$; $b=\overline{CA}=\sqrt{200}$; $\measuredangle\beta=45°$

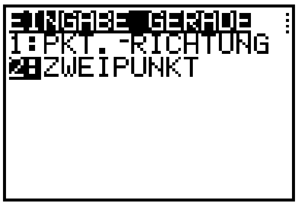
Nachweis der Rechtwinkligkeit: $\measuredangle\alpha=90°$

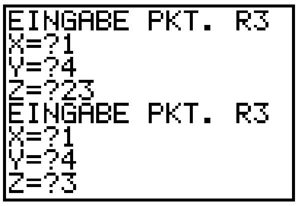
Ansatz für Koordinaten des Punktes P: z. B. mit GTR-Programm: Geometrie wird Punkt A an Gerade g gespiegelt.

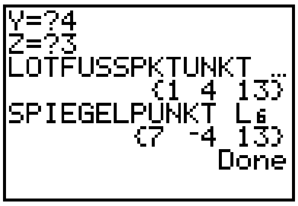












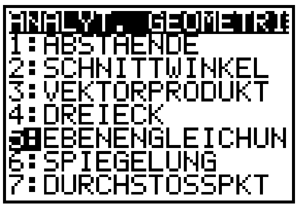
Den Lotfußpunkt M(1 | 4 | 13) brauchen wir später noch mal.

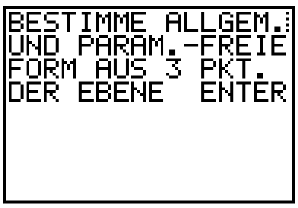
Koordinaten des Punktes P: P(7 | -4 | 13) 6 BE

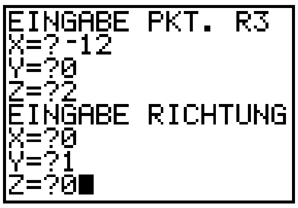
b) Ansatz für Gleichung der Ebene: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-12\\a\\2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ kann auch als Ebene aufgefasst

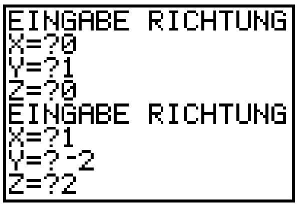
werden: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-12\\0\\2\end{pmatrix}+a\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ $(a,r\in\mathbb{R})$ $\Rightarrow$ weiter mit GTR-Programm:

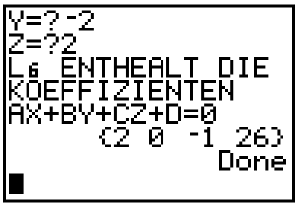
Geometrie:











Gleichung der Ebene: -2x + z = 26 2 BE

c) Untersuchung der in Frage kommenden Richtungsvektoren.

Begründung: $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 10 \end{pmatrix}$ ist nicht lösbar.

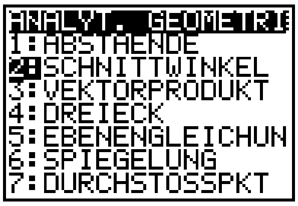
Ansatz für Koordinaten des Punktes Q: $h_a \cap g = Q \Rightarrow 2(-5 + 6s) - (13 + 10s) + 26 = 0 \Rightarrow s = -1.5$

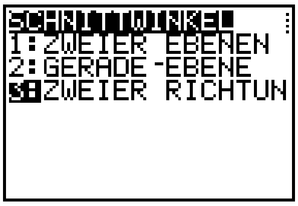
$\Rightarrow$ Es gibt immer genau einen Schnittpunkt Q.

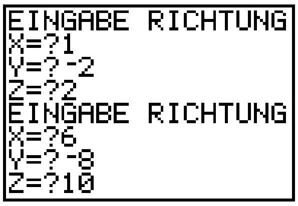
Koordinaten des Punktes Q: Q(-14 | 24 | -2)

Größe des Schnittwinkels: $\alpha \approx 8{,}1°$

z. B.: GTR prgmGeometrie $\alpha = \measuredangle\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 10 \end{pmatrix}\right)$







4 BE

d) Koordinaten des Mittelpunktes der Grundfläche: mit M aus Teilaufgabe a) ergibt sich

$\overrightarrow{OS^*} = \overrightarrow{OS} + 2 \cdot \overrightarrow{SM}$

Ansatz für Koordinaten des Punktes S^*

Koordinaten des Punktes S^*: $S^*(13 \mid 13 \mid 13)$ 3 BE

15 BE

Teil C

$p_1 = .05$; $q_1 = 1 - p_1 = .95$; $p_2 = .02$; $q_1 = .98$; $p_3 = .04$; $q_1 = .96$ (p – defekt; q – ganz)

a) Wahrscheinlichkeit P(A): $P(A) \approx 0{,}0372 = p_1 \cdot q_2 \cdot q_3$
Wahrscheinlichkeit P(B): $P(B) \approx 0{,}0037 = p_1 \cdot p_2 \cdot q_3 + p_1 \cdot q_2 \cdot p_3 + q_1 \cdot p_2 \cdot p_3$ 2 BE

b) Werte der Zufallsgröße
Wahrscheinlichkeitsverteilung:

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,89376	0,10252	0,00368	0,00004

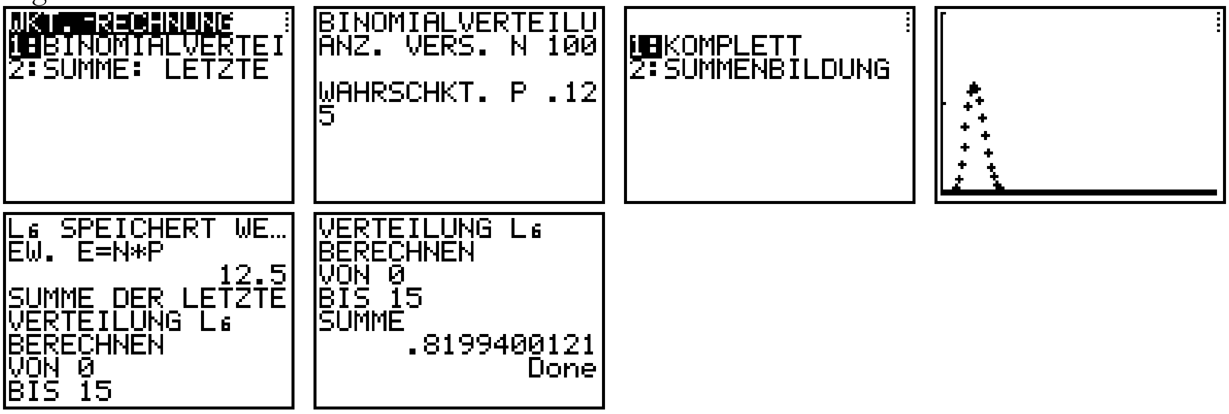
$E(X) = 1 \cdot P(X=1) + 2 \cdot P(X=2) + 3 \cdot P(X=3) = 0{,}11$

Anzahl der zu erwartenden fehlerhaften Bauteile: n = 11 3 BE

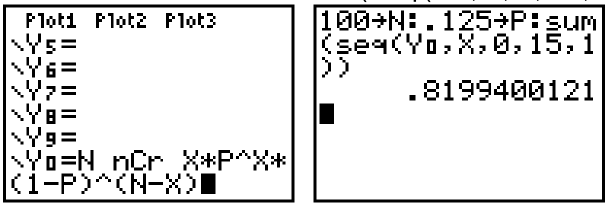
c) Ansatz für Wahrscheinlichkeit:
die Größe ist binomialverteilt mit B(15, .125, 2)
Wahrscheinlichkeit p: $p \approx 0{,}2891$ 2 BE

d) Ansatz für Wahrscheinlichkeit: z. B.
P = B(100, .125, 0) + B(100, .125, 1) + ... + B(100, .125, 15) und weiter mit GTR

PrgmWahrsche:



TI-82[3]: `100→N:.125→P:sum(seq(Y0,X,0,15,1))` → 0,8199



Wahrscheinlichkeit p: p ≈ 0,8199 2 BE

e) Die Aufgabe ist wohl nur durch Probieren zu lösen. Verwenden Sie das GTR-Programm oder gehen sie wie in Teilaufgabe d) vor.
Zum Beispiel erhalten Sie mit `60→N:.125→P:sum(seq(Y0,X,0,N-50,1))` → 0,8768

N	59	60	61	62	63
$\sum_{k=0}^{n-50} B_{n,.125}(k)$	0,8031	0,8768	0,9271	0,9591	0,9781

Anzahl n: n = 61 1 BE
10 BE

Teil D1

a) Nachweis: $-f(x) = 5\cdot(-e+e^{-x})$ und $g(-x) = 5\cdot(e^{-x}-e)$
geometrische Interpretation: die beiden Graphen sind punktsymmetrisch zueinander.
Symmetriepunkt ist der Koordinatenursprung. 2 BE

b) Koordinaten eines Schnittpunktes: S(1,65745 | 12,63829)
Wer es genau wissen möchte: $S\left(\ln\left(\sqrt{e^2-1}+e\right) \middle| 5\cdot\sqrt{e-1}\right)$
Lösungsidee:
betrachte Diagonale mit y = 7.625 x und das untere Dreieck;
Dreiecksfläche ist A = ½(2·1,65745)·(2·12,63829) ≈ 41.8948
Fläche zwischen Diagonale und g(x): B = 19.7777
B/A = 0,4721
Flächeninhalt der eingeschlossenen Fläche
prozentualer Anteil p: p ≈ 47,1% 3 BE

---

3 Das Programm `Wahrsche` funktioniert nur, falls genügend Arbeitsspeicher vorhanden ist. Es werden alle 101 Werte der Binomialverteilung berechnet und abgespeichert. SchülerInnen, die nicht viel Arbeitsspeicher frei haben, können das umgehen, indem nur die ersten 16 Werte (0..15) in einer Liste berechnet werden (das macht der `seq`-Befehl) und danach die Summe dieser Werte berechnet wird. Das Programm `Wahrsche` legt im Funktionsmenü `Y0` fest, so dass nur noch die Eingangsvariablen `N` und `P` mittels `Store`-Taste belegt werden müssen. Die Befehle `seq` und `sum` finden sich im `List`en-Menü oder im `Catalog`.

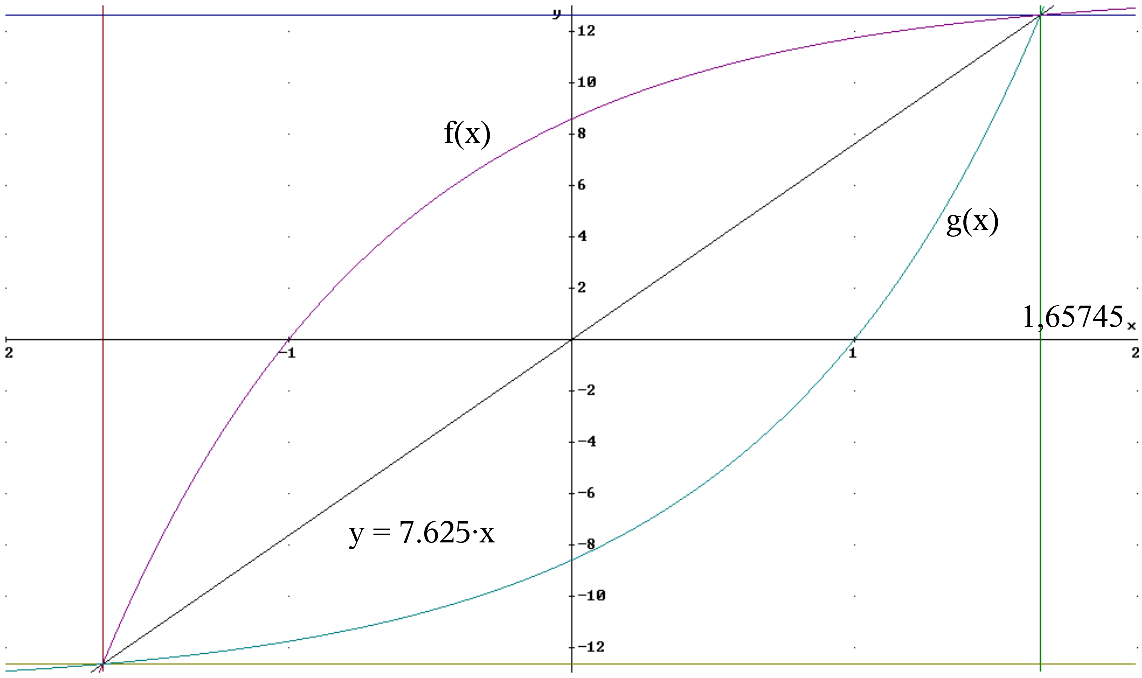


Abbildung 3

c) Ansatz für Berechnung des Wertes k: $V_k(0) = 8{,}6 = k \cdot e - k$
Wert k: $k \approx 5{,}0$
Ansatz für Ermittlung der Zeit: $V_k(t) = 1{,}5 \cdot V_k(0) = 12{,}9$
Zeit: $t \approx 2{,}0$
Fassungsvermögen des Fasses: $V \geq 13{,}6$; da V monoton steigt: $\lim_{t\to\infty} V_k(t) = 5e$ 5 BE

10 BE

Teil D2

a) $g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2a \\ 4a \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4-a \\ 10-2a \\ -4 \end{pmatrix}$

Für zwei beliebige (ungleiche) Geraden gilt $g_a \neq g_b \Leftrightarrow a \neq b$. Gesucht ist $g_a \cap g_b = S$.

$$g_a \cap g_b: \begin{pmatrix} 2a \\ 4a \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4-a \\ 10-2a \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b \\ 4b \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4-b \\ 10-2b \\ -4 \end{pmatrix}$$

Aus der letzten Zeile kann man s = t herauslesen. Es bleibt das lGS:
I: $2a + t(4-a) = 2b + t(4-b)$
II: $4a + t(10-2a) = 4b + t(10-2b)$
und durch weitere Vereinfachung:
I': $2(a - b) = t(a - b)$
II': $4(a - b) = t \cdot 2(a - b)$
beide Gleichungen habe die gleiche Lösungsmenge und da $a \neq b$ ist muss $a - b \neq 0$ sein. Folglich ist $t = 2$.

Der Schnittpunkt ist dann $g_a \cap g_b = S: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2a \\ 4a \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 4-a \\ 10-2a \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 20 \\ -4 \end{pmatrix}$. Mit anderen Worten schneiden sich alle Geraden in genau einem Punkt S.
Ansatz für Lagebeziehung

Lagebeziehung der Geraden $g_{-3/4}$ und $g_{1/2}$
Ansatz für Nachweis
Nachweis 4 BE

b) Ansatz für Nachweis: Parallelität würde eintreten, wenn der Richtungsvektor der Geraden parallel zum Normalenvektor der x-y-Ebene wäre: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 4-a \\ 10-2a \\ -4 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} \Rightarrow k = 0 \\ \Rightarrow k = -\frac{1}{4} \end{matrix}$. Die Geraden schneiden die Ebene nicht senkrecht.
Nachweis
Ansatz für Gleichung der Geraden, auf der alle Schnittpunkte liegen:
x-y-Ebene: z = 0 (x, y ∈ ℝ)

$$S_a\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 4a \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4-a \\ 10-2a \\ -4 \end{pmatrix}$$ ⇒ t = 1 (letzte Zeile) und y = 2x + 2 (Eliminieren von a)

Gleichung der Geraden, z. B.: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ (a ∈ ℝ)

Ansatz für Wert a: Der Schnittwinkel α wird maximal, wenn der Winkel α' zwischen Ebenennormale und Richtungsvektor minimal wird.

$$\alpha' = \measuredangle\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4-a \\ 10-2a \\ -4 \end{pmatrix}\right) = \arccos\left(\frac{-4}{\sqrt{(4-a)^2 + (10-2a)^2 + 16}}\right)$$

Dieser Term wird minimal, wenn die Wurzel maximal ist. p(a) = $(4-a)^2+(10-2a)^2+16$ ist eine nach unten geöffnete Parabel und hat somit nur einen Hochpunkt. Weiter mit GTR:
`solve(nDerive(p(x),x,x),x,-4)` → 4,8
Wert a: a = 4,8 6 BE
10 BE