

Teil A Analysis

gegeben $f(x) = 2x(x-3)^2 = 2x(x^2 - 6x + 9) = 2x^3 - 6x^2 + 9x \quad (x \in \mathbb{R})$

a) - Angabe

NSt.: $x_{N1} = 0; \quad x_{N2} = 3$ (Ablese von Fktstern oder GTR)

Extrempkte: $H(1;8); \quad T(3;0)$ (GTR)

Wendepkt: $W(2;4)$ (GTR z.B. Extremstelle von f' als Wendestelle von f)

b) - Ermittlung eines Flächenverhältnisses

Gesamtfläche: $A_G = \int_{x_{N1}}^{x_{N2}} f(x) dx \stackrel{GTR}{=} 13,5$

obere Teilfläche: $A_1 = \int_{x_{S1}}^{x_{S2}} (f(x) - 4) dx : x_{S1} \stackrel{GTR}{\approx} 0,27; \quad x_{S2} = x_W = 2; \quad A_1 \stackrel{GTR}{=} 4,5$

untere Teilfläche: $A_2 = A_G - A_1 = 9$

Flächenverhältnis: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{4,5}{9} = \frac{1}{2}$

c) Extremwertproblem

1. Aufstellung der Zielfunktion

Extremgröße: Abstand von Funktionswerten $d = f(c) - g(c)$

Nebenbedingungen: g verläuft durch $O(0;0)$ und $P(2;f(2) = 4)$

$$\text{da } O \in g : n = 0 \text{ und } m = \frac{f(2)}{2} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow g(x) = 2x$$

Einsetzen der Nebenbedingungen in die Ausgangsgleichung der Extremgröße

Zielfunktion: $d(c) = 2c(c-3)^2 - 2c \quad (c \in \mathbb{R}; 0 < c < 2)$

2. Berechnung der Extrempunkte der Zielfkt in deren Definitionsbereich

GTR: $H(0,85;6,16)$

Wählt man für c den Wert 0,85, dann erhält man den größten Abstand der Funktionswerte von 6,16LE.

d) Ermittlung desjenigen u_g für das der Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von f , der Geraden

$x = u$ und der x -Achse 12FE beträgt

- Berechnung des Flächeninhaltes in Abhängigkeit von u

$$A = \int_0^u f(x) dx = [F(x)]_0^u = \left[\frac{2}{4} x^4 - \frac{12}{3} x^3 + \frac{18}{2} x^2 \right]_0^u = \frac{1}{2} u^4 - 4u^3 + 9u^2 - (0)$$

$$A(u) = \frac{1}{2} u^4 - 4u^3 + 9u^2$$

- Verwendung der Bedingung zur Berechnung von u_g

$$12 = \frac{1}{2} u_g^4 - 4u_g^3 + 9u_g^2 \Leftrightarrow 0 = \frac{1}{2} u_g^4 - 4u_g^3 + 9u_g^2 - 12 \stackrel{GTR}{\Leftrightarrow} u_g = 2$$

e) Berechnung der Koordinaten des Spiegelpkts H' von H an $y = 2x$

1. da der Lotfußpunkt auf der Geraden liegt gilt: $y_L = 2x_L$

$$2. \overrightarrow{OL} \perp \overrightarrow{HL} : \overrightarrow{OL} \cdot \overrightarrow{HL} = \begin{pmatrix} x_L \\ y_L \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_L - x_H \\ y_L - y_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_L \\ 2x_L \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_L - 1 \\ 2x_L - 8 \end{pmatrix} = x_L(x_L - 1) + 2x_L \cdot (2x_L - 8) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 = x_L((x_L - 1) + 2(2x_L - 8)) = x_L(x_L - 1 + 4x_L - 16) = x_L(5x_L - 17) \Leftrightarrow \begin{cases} 1. x_L = 0 & \text{entfällt} \\ 2. x_L = \frac{17}{5} \end{cases}$$

$$3. \quad \overrightarrow{OH'} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{LH'} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{HL} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{OL} - \overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{OL} - \overrightarrow{OH} = 2 \begin{pmatrix} x_L \\ y_L \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_H \\ y_H \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2x_L - x_H \\ 2y_L - y_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot \frac{17}{5} - 1 \\ 4 \cdot \frac{17}{5} - 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{29}{5} = 5,8 \\ \frac{28}{5} = 5,6 \end{pmatrix}$$

Der Spiegelungspkt von H hat die Koordinaten (5,8;5,6)

f) Ermittlung eines Flächeninhaltes in Abhängigkeit vom Parameter a

Flächeninhalt eines Dreiecks (rechtwinklig) $A_D = \frac{1}{2}ab$

$a = |x_N|$; $b = |y_0|$ Achsenabschnitte der Geraden h durch die Extrempunkte der Fkt f_a
zur Aufstellung der Geradengl. werden die koordinaten der Extrempkte benötigt

$$f_a(x) = ax(x-3)^2 = a(x^3 - 6x^2 + 9x)$$

A: mögliche Extremstellen $f'_a(x) = a(3x^2 - 12x + 9)$

$$f'_a(x_E) = 0 \Leftrightarrow 0 = 3x_E^2 - 12x_E + 9 \stackrel{GTR}{\Leftrightarrow} x_{E1} = 1; x_{E2} = 3$$

B: Nachweis und Art der Extrema $f''_a(x) = a(6x - 12)$

$$f''_a(x_{E1}) = a(6 - 12) = -6a \stackrel{a>0}{<} 0 \Rightarrow \text{lokales Maximum}$$

$$f''_a(x_{E2}) = a(18 - 12) = 6a \stackrel{a>0}{>} 0 \Rightarrow \text{lokales Minimum}$$

C: y-Koordinaten der Extrempunkte

$$f_a(x_{E1}) = a(1-3)^2 = 4a \Rightarrow H(1;4a); f_a(x_{E2}) = a(3-3)^2 = 0 \Rightarrow T(3;0)$$

Aufstellung der Geradengleichung mit 2-Pkte-Form

$$y - 0 = \frac{4a - 0}{1 - 3}(x - 3) = -\frac{4a}{2}(x - 3) = -2a(x - 3) = -2ax + 6a = y$$

Berechnung: $x_N = 3$ (wegen T); $y_0 = 6a$

$$\text{Flächeninhalt: } A_D = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6a = 9a$$

Teil B Geometrie / Algebra

geg.: Punkte $A(-5;12;13)$; $B(1;4;23)$; $C(1;4;3)$; $h_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} -12 \\ a \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$; Gerade g enthält A und B

a) - Nachweis, dass A, B, C Eckpunkte eines Dreiecks sind

A, B, C Eckpkte eines Dreiecks wenn kein k existiert für das gilt: $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ (Vektoren müssen linear unabhängig sein)

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 10 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ -10 \end{pmatrix} : \left. \begin{array}{l} 6 = 6k_x \Rightarrow k_x = 1 \\ -8 = -8k_y \Rightarrow k_y = 1 \\ 10 = -10k_z \Rightarrow k_z = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow k_y \neq k_z \Rightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \text{ lin. unabh.} \Rightarrow \text{Beh.}$$

Nachweis, dass ABC gleichschenkelig

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{6^2 + (-8)^2 + 10^2} = \sqrt{200}; |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{6^2 + (-8)^2 + (-10)^2} = \sqrt{200}$$

D.h. Das Dreieck hat zwei gleich lange Seiten und ist somit gleichschenkelig.

Nachweis, dass ABC rechtwinklig

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6 \cdot 6 + (-8) \cdot (-8) + 10 \cdot (-10) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$$

Da der rechte Winkel bei A liegt, muss P A gegenüberliegen (Viereck ABPC)

$$\vec{OP} = \vec{OC} + \vec{CP} = \vec{OP} + \vec{AB4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 13 \end{pmatrix} \quad P(7;-4;13)$$

b) - Aufstellung der Ebenengl. derjenigen Ebene E die alle h_a enthält

$$\text{Stützvektor: } \vec{OP}_0 = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Richtungsvektor 1: } \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Richtungsvektor 2: } \vec{P_0P_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufstellung der Geradengl mit GTR-Programm: E $2x - z = -26$

c) Begründung dafür, dass h_a und g nie parallel verlaufen

Die Geraden verlaufen parallel, wenn die Richtungsvektoren linear abhängig sind.

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 10 \end{pmatrix}: \vec{AB} = k\vec{a} \quad \left. \begin{array}{l} 6 = k_x \Rightarrow k_x = 6 \\ -8 = -2k_y \Rightarrow k_y = 4 \\ 10 = 2k_z \Rightarrow k_z = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{AB}, \vec{a} \text{ linear unabhängig}$$

Berechnung des Schnittpunktes Q

$$-5 + 3m = -12 + r \Rightarrow r = 3m + 7 \quad (1)$$

$$12 - 4m = 9 - 2r$$

$$13 + 5m = 2 + 2r$$

$$\text{mit (1) } 13 + 5m = 2 + 2(3m + 7) \Leftrightarrow m = -3$$

$$\vec{OQ} = \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \\ 13 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 24 \\ 2 \end{pmatrix} \quad Q(-14;24;2)$$

Berechnung des Schnittwinkels (GTR-Programm): $\angle(\vec{AB}, \vec{a}) = \alpha \approx 8,13^\circ$

d) Berechnung der Koordinaten des Punktes S^*

Da die Pyramide eine gerade Pyramide sein soll, ist der Diagonalschnittpunkt der Grundfläche der Lotfußpunkt L der Punkte S und S^* und es gilt:

$$L\left(\frac{1+1}{2}; \frac{4+4}{2}; \frac{23+3}{2}\right) = (1;4;13)$$

$$\vec{OS^*} = \vec{OL} + \vec{LS^*} = \vec{OL} + \vec{SL} = \vec{OL} + (\vec{OL} - \vec{OS}) = 2\vec{OL} - \vec{OS} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -11 \\ -5 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 13 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$S^*(13;13;13)$$

Teil C Stochastik

gegeben sind die bedingten Wahrscheinlichkeiten:

$P_{B_1}(f) = 0,05$... Wahrscheinlichkeit dafür, dass Bauteil B1 defekt ist

$P_{B_2}(f) = 0,02$... Wahrscheinlichkeit dafür, dass Bauteil B2 defekt ist

$P_{B_3}(f) = 0,04$... Wahrscheinlichkeit dafür, dass Bauteil B3 defekt ist

a) Berechnung der Wahrscheinlichkeit der Ereignisse

Ereignis A ... nur Bauteil B3 ist defekt

$$P(A) = P_{B_1}(\bar{f}) \cdot P_{B_2}(\bar{f}) \cdot P_{B_3}(f) = (1 - 0,05) \cdot (1 - 0,02) \cdot 0,04 \approx 0,0372$$

Ereignis B ... genau 2 Bauteile Defekt

$$P(B) = P_{B_1}(f) \cdot P_{B_2}(\bar{f}) \cdot P_{B_3}(\bar{f}) + P_{B_1}(\bar{f}) \cdot P_{B_2}(f) \cdot P_{B_3}(f) + P_{B_1}(\bar{f}) \cdot P_{B_2}(\bar{f}) \cdot P_{B_3}(f) \approx 0,0037$$

- b) ZEb1: Entnahme eines Gerätes und Feststellung der Anzahl der defekten Bauteile
ZG X_B gibt die Anzahl der defekten Bauteile in einem Gerät an

Aufstellung der Wahrscheinlichkeitsverteilung der ZG X_B

Anzahl der def. Bauteile N	0	1	2	3
$P(N)$	0,89376	0,10252	0,00368	0,00004

$$P(0) = P_{B_1}(\bar{f}) \cdot P_{B_2}(\bar{f}) \cdot P_{B_3}(\bar{f})$$

$$P(1) = P_{B_1}(f) \cdot P_{B_2}(\bar{f}) \cdot P_{B_3}(\bar{f}) + P_{B_1}(\bar{f}) \cdot P_{B_2}(f) \cdot P_{B_3}(\bar{f}) + P_{B_1}(\bar{f}) \cdot P_{B_2}(\bar{f}) \cdot P_{B_3}(f)$$

$$P(2) = P(B) = P_{B_1}(f) \cdot P_{B_2}(f) \cdot P_{B_3}(\bar{f}) + P_{B_1}(f) \cdot P_{B_2}(\bar{f}) \cdot P_{B_3}(f) + P_{B_1}(\bar{f}) \cdot P_{B_2}(f) \cdot P_{B_3}(f)$$

$$P(3) = P_{B_1}(f) \cdot P_{B_2}(f) \cdot P_{B_3}(f)$$

Berechnung des Erwartungswertes der ZG X_B

$$E(B) = 0 \cdot P(0) + 1 \cdot P(1) + 2 \cdot P(2) + 3 \cdot P(3) \approx 0,11$$

Bei 100 entnommenen Geräten ist mit 11 fehlerhaften Bauteilen zu rechnen.

- c) ZEc1 ... Entnahme eines Gerätes der Produktion und Feststellung der Funktionstüchtigkeit
BERNOULLI-Experiment mit den Ereignissen

$$d \dots \text{Gerät defekt} \quad P(d) = 0,125$$

$$\bar{d} \dots \text{Gerät in Ordnung}$$

ZEc15 ... Entnahme von 15 Geräten der Produktion und Feststellung der Funktionstüchtigkeit
BERNOULLI-Kette

ZG X_C gibt die Anzahl der defekten Geräte in der Stichprobe vom Umfang 15 an. ZG X_C ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 15$ und $p = P(d) = 0,125$

Ereignis C ... **genau 2** defekte Geräte

$$P(C) = P(X_C = 2) \stackrel{GTR}{\approx} 0,2891$$

- d) ZEd=ZEc100 ... Entnahme von 100 Geräten der Prod. und Feststellung der Funktionstüchtigkeit
BERNOULLI-Kette

ZG X_D gibt die Anzahl der nicht defekten Geräte in der Stichprobe vom Umfang 100 an. ZG X_D ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 100$ und $p = P(\bar{d}) = 1 - 0,125 = 0,875$

Ereignis B ... **mindestens 85** intakte Geräte

$$P(B) = P(85 \leq X_D \leq 100) \stackrel{GTR}{\approx} 0,8199$$

- e) ZEE=ZEc_n ... Entnahme von n Geräten der Prod. und Feststellung der Funktionstüchtigkeit
BERNOULLI-Kette

ZG X_E gibt die Anzahl der nicht defekten Geräte in der Stichprobe vom Umfang n an. ZG X_E ist binomialverteilt mit den Parametern n und $p = P(\bar{d}) = 1 - 0,125 = 0,875$

gesucht ist dasjenige n_{\min} für das die Wahrscheinlichkeit $P(E) = P(50 \leq X_E \leq n) \geq 0,9$

n muss also größer als 50 sein, dann probieren mit GTR

$$n = 60 : P(E) \approx 0,8768$$

$$n = 61 : P(E) \approx 0,9271$$

Für n=61 ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E erstmals größer als 0,9, d.h. es müssen mindestens 61 Geräte bestellt werden.

Teil D1 Wahlaufgabe Analysis

gegeben: $f(x) = 5(e - e^x)$, $g(x) = 5(e^{-x} - e)$ ($x \in \mathbb{R}$)

- a) Nachweis, dass $g(-x) = -f(x)$ gilt:

$$g(-x) = 5(e^{-(-x)} - e) = 5(-1)(e - e^x) = -5(e - e^x) = -f(x)$$

Geometrische Interpretation: Bei Punktspiegelung am Koordinatenursprung wird der Graph von g auf dem von f abgebildet.

- b) Berechnung des Flächenanteils der von f, g vollständig begrenzten Fläche am Rechteck mit den diagonal liegenden Eckpunkten S_1, S_2 und achsenparallelen Seiten

Flächeninhalt des Rechteckes: $A_R = a \cdot b = |x_{S_2} - x_{S_1}| \cdot |y_{S_2} - y_{S_1}|$

Fläche zwischen den Graphen: $A_G = \left| \int_{x_{S_1}}^{x_{S_2}} (f(x) - g(x)) dx \right|$

Berechnung der Koordinaten der Schnittpkte mit GTR:

$S_1(-1,66; -12,64); S_2(x_{S_2} = -x_{S_1} = 1,66; y_{S_2} = -y_{S_1} = 12,64)$

$A_R = 4 \cdot 1,66 \cdot 12,64 \approx 83,93; A_G \approx 39,56$

prozentualer Anteil von A_G an A_R : $\approx 47,1\%$

- c) $V_k(t) = ke - ke^{-t} = k(e - e^{-t}) \quad (t \geq 0)$

Berechnung desjenigen k_G für das gilt: $V_{k_G}(0) = 8,6$

$8,6 = k_G(e - e^{-0}) \Leftrightarrow k_G = \frac{8,6}{e - 1} \approx 5,00$

Berechnung derjenigen Zeit $t_{1,5}$ nach der das Volumen auf das 1,5-fache des Anfangsvolumens angestiegen ist

$V_5(t_{1,5}) = 5(e - e^{-t_{1,5}}) = 1,5 \cdot 8,6 \Leftrightarrow e^{-t_{1,5}} = e - \frac{1,5 \cdot 8,6}{5} \Leftrightarrow t_{1,5} = -\ln\left(e - \frac{1,5 \cdot 8,6}{5}\right) = 1,96$

Berechnung des maximal benötigten Fassungsvermögens:

$\lim_{t \rightarrow \infty} V_5(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (5(e - e^{-t})) = 5(e - 0) = 5e \approx 16,6VE$

Teil D2 Wahlaufgabe Geometrie / Algebra

gegeben: $g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2a \\ 4a \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 - a \\ 10 - 2a \\ -4 \end{pmatrix}$

a) Lagebeziehung $g_{\frac{3}{4}}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1,5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4,75 \\ 11,5 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $g_{\frac{1}{2}}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3,5 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix}$

$-1,5 + 4,75t = 1 + 3,5s \quad \xrightarrow{\text{mit(1),(2)}} \Rightarrow 8 = 8 \text{ wahre Aussage}$

$-3 + 11,5t = 2 + 9s \quad \xrightarrow{\text{mit(1)}} \Rightarrow 2,5s = 5 \Leftrightarrow s = 2(2)$

$4 - 4t = 4 - 4s \Rightarrow (1)t = s$

Die Geraden schneiden sich, weil das GS eindeutig lösbar ist.

Berechnung des SP durch Einsetzen des berechneten Parameters: $S(8;20;-4)$

Falls sich alle Geraden in einem Pkt schneiden, dann muss S dieser Pkt sein und die allgemeine Geradengl. erfüllen. Pktprobe für S in allgemeiner Geradengleichung:

$$\begin{aligned} 8 &= 2a + (4 - a)t = 2a + 4t - at && \stackrel{t=2}{\Rightarrow} 8 = 8 \\ 20 &= 4a + (10 - 2a)t = 4a + 10t + 2at && \stackrel{t=2}{\Rightarrow} 20 = 20 \\ -4 &= 4 - 4t && \Leftrightarrow t = 2 \end{aligned}$$

D.h. S erfüllt alle Gleichungen.

b) Nachweis, dass keine Gerade g_a senkrecht auf x-y-Ebene steht

g_a genau dann senkrecht zur x-y-Ebene, wenn der RV von g_a und ein zur x-y-Ebene senkrechter Vektor linear abhängig sind

Normalenvektor der x-y-Ebene: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\left. \begin{aligned} 0 &= k_x(4 - a_x) && \stackrel{k_x \neq 0}{\Rightarrow} 0 = 10 - 2a_z \Leftrightarrow a_z = 4 \\ 0 &= k_y(10 - 2a_y) && \stackrel{k_y \neq 0}{\Rightarrow} 0 = 10 - 2a_y \Leftrightarrow a_y = 5 \\ 1 &= -4k_z \Rightarrow k_z = -\frac{1}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{linear unabhängig}$$

d.h. keine der Geraden steht auf der x-y-Ebene senkrecht

Berechnung der Geraden aus den Schnittpunkten der Geraden g_a mit der x-y-Ebene

Bedingung $z = 0$

$$\left. \begin{aligned} x &= 2a + (4 - a)t && \stackrel{\text{mit(1)}}{\Rightarrow} x = 4 + a \\ y &= 4a + (10 - 2a)t && \stackrel{\text{mit(1)}}{\Rightarrow} y = 10 + 2a \\ 0 &= 4 - 4t \Leftrightarrow t = 1 \quad (1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow s_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ bzw. } y = 2x + 2$$

Ermittlung desjenigen a_E für das der Schnittwinkel mit der x-y-Ebene maximal wird

$\alpha = \angle(\vec{n}; \vec{a}_a)$... Winkel zwischen dem Normalenvektor der Eben und dem RV von g_a

$\beta = \angle(E_{xy}; g_a) = 90^\circ - \alpha$... Schnittwinkel x-y-Ebene und Gerade g_a

$$\beta = 90^\circ - \alpha \quad \cos \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{a}_a|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{a}_a|} \Rightarrow \beta = 90^\circ - \arccos \left| \frac{\vec{n} \cdot \vec{a}_a}{|\vec{n}| \cdot |\vec{a}_a|} \right|$$

$$\beta = 90^\circ - \arccos \left| \frac{0 \cdot (4 - a) + 0 \cdot (10 - 2a) + 1 \cdot (-4)}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(4 - a)^2 + (10 - 2a)^2 + (-4)^2}} \right|$$

$$\beta = \beta(a) = 90^\circ - \arccos \left| \frac{-4}{\sqrt{(4 - a)^2 + (10 - 2a)^2 + 16}} \right|$$

Berechnung des lokalen Extremums der Fkt $\beta(a)$: $H(4,80;77,40)$

Für $a=4,80$ wird der größtmögliche Winkel mit der x-y-Ebene eingeschlossen.