Schriftliche Abiturprüfung – Leistungskursfach – Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Aus rechtlichen Gründen möchte ich Sie darauf hinweisen, dass Sie sich auf einer **privaten** Seite befinden. Insbesondere ist dies **kein** Produkt des Sächsischen Staatsministeriums für Kultus, welches die Abituraufgaben entwickelt.

Dies ist die Abschrift der Prüfungsaufgaben 2002, wie sie vom Sächsischen Staatsministeriums für Kultus auf dem Sächsischen Schulserver (www.sachsen-macht-schule.de) veröffentlicht wurden.

Außerdem sollten Sie folgendes wissen:

- Lösungen der Aufgaben können auf unterschiedlichen Wegen erreicht werden. Hier finden Sie VORSCHLÄGE zur Lösung und VORSCHLÄGE zur Bewertung, die nicht für die Bewertung Ihres Abiturs herangezogen werden können. Dafür ist jeder prüfende Fachlehrer verantwortlich.
- Ich habe versucht, den graphikfähigen Taschenrechner (GTR – hier TI 82/83/83+) besonders häufig einzusetzen. Damit sollen Möglichkeiten aufgezeigt werden, auch wenn eine Rechnung vielleicht schneller zum Ziel führen würde.
- Eingesetzte Programme finden Sie auf den Mathe-Seiten des sächsischen Schulservers unter www.sn.schule.de/~matheabi dokumentiert und anhand von vielen Beispielen erklärt. Insbesondere möchte ich auf eine zusammenfassende Broschüre zu diesem Thema verweisen: www.sn.schule.de/~matheabi/data/gtrZsfsg.pdf.
- Die **offiziellen** Abituraufgaben werden nach Beendigung der Prüfungsphase auf dem Sächsischen Schulserver veröffentlicht.
- Für Nachfragen und Ihre Hinweise stehe ich Ihnen gerne zur Verfügung: F. Müller (mathe@oskar-reime-gymnasium.de) – Mathe-Lehrer.
  Dieses Dokument wurde zuletzt aktualisiert am 02.05.04.
- Wenn Sie Fehler finden oder Ergänzungen haben, teilen Sie mir das bitte mit.

Material für den Prüfungsteilnehmer

Allgemeine Arbeitshinweise

Ihre Arbeitszeit (einschließlich der Zeit für das Lesen der Aufgabentexte und der Zeit für die Auswahl der Wahlaufgabe) beträgt **300 Minuten.**

Auf dem Deckblatt der Arbeit haben Sie den verwendeten GTR-Typ anzugeben.

Die Prüfungsarbeit besteht aus den zu bearbeitenden Pflichtteilen **A, B** und **C** sowie dem **Wahlteil D.**
Es sind alle Aufgaben der Pflichtteile zu bearbeiten.
Aus dem Teil D ist **genau eine** der beiden Aufgaben zu bearbeiten.
Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionen) Hilfslinien muss deutlich erkennbar in gut lesbarer Form dargestellt werden.

Bei Verwendung von GTR-Programmen ist anzugeben, aus welchen Eingabedaten das Programm welche Ausgabendaten berechnet.

Insgesamt sind 60 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar, davon
im Teil A 25 BE,
im Teil B 15 BE,
im Teil C 10 BE,
im Teil D 10 BE.

Erlaubte Hilfsmittel:

1 Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung
1 grafikfähiger, programmierbarer Taschenrechner (GTR) ohne Computer-Algebra-System
1 Tabellen- und Formelsammlung ohne ausführliche Musterbeispiele (im Unterricht eingeführt)
Zeichengeräte
beiliegende „Materialien für Aufgaben zur Stochastik“[1]

Bewertungsmaßstab

Pkte.	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
60 BE	60-58	57-55	54-52	51-49	48-46	45-43	42-40	39-37	36-34	33-31	30-28	27-25	24-21	20-17	16-13	12-0

Prüfungsinhalt

Pflichtaufgaben

Teil A: Analysis

Gegeben ist eine Funktion f durch $y=f(x)=\frac{1}{2}x^2\cdot e^{-\frac{1}{2}x}$ $(x \in \mathbb{R})$

a) Geben Sie die Nullstelle, die Koordinaten der lokalen Extrempunkte und deren Art sowie die Koordinaten der Wendepunkte des Graphen der Funktion f an. Erreichbare BE-Anzahl: 5

b) Ermitteln Sie eine Gleichung der quadratischen Funktion, deren Graph durch den Koordinatenursprung geht und im Punkt P(2 | 2) einen lokalen Extrempunkt hat. Erreichbare BE-Anzahl: 4

1 Diese werden hier nicht wiedergegeben. Sie enthalten zumeist eine Tabelle zur Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Manchmal eine Tabelle zur Summenfunktion der Binomialverteilung. Beides kann durch Verwendung des GTR leicht ersetzt werden. Die Tabellen finden Sie im Inhalt der Online-Ausgabe dieses Textes www.sn.schule.de/~matheabi.

c) Weisen Sie nach, dass die Funktion F mit $F(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\cdot(-x^2-4x-8)$ (x ∈ IR) eine Stammfunktion der Funktion f ist.
Ermitteln Sie eine Gleichung derjenigen Stammfunktion von f, deren Graph durch den Punkt Q(0 | -12) geht.
Der Graph der Funktion f, die Parabel g mit der Gleichung $y=g(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x$ (x ∈ IR) und die Gerade x = 2 begrenzen im Intervall [2; 0] eine Fläche vollständig.
Weisen Sie ohne Verwendung von Näherungswerten nach, dass der Inhalt dieser Flache $\left(\frac{20}{\mathrm{e}}-\frac{16}{3}\right)$ beträgt. Erreichbare BE-Anzahl: 7

d) Es gibt genau eine Tangente an den Graphen der Funktion f, die zur Geraden mit der Gleichung y = -3ex parallel ist.
Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Tangente. Erreichbare BE-Anzahl: 4

e) Für jede Zahl t (t ∈ IR, t > 0) ist eine Funktion f_t durch $y=f_t(x)=t\,x^2\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$ (x ∈ IR) gegeben.
Der Graph der Funktion t f besitzt genau einen lokalen Maximumpunkt.
Zeigen Sie, dass alle diese Punkte auf ein und derselben Geraden liegen. Geben Sie eine Gleichung dieser Geraden an.
Begründen Sie, dass es keine Zahl t gibt, so dass der lokale Maximumpunkt der Funktion f_t unterhalb der x-Achse liegt. Erreichbare BE-Anzahl: 5

Teil B: Geometrie /Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem ist ein Prisma ABCDEFGH mit rechteckiger Grundfläche ABCD durch die Punkte A(4 | 1 | -4), B(5 | 7 | -4), C(-1 | 7 | 1) und E(5,5 | -1,5 | 0,5) gegeben. Die Strecke $\overline{AE}$ ist eine Kante des Prismas.

a) Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes D.
Stellen Sie das Prisma in einem kartesischen Koordinatensystem dar.
Zeigen Sie, dass dieses Prisma ein Quader ist. Erreichbare BE-Anzahl: 5

b) Bestimmen Sie die Größe des Neigungswinkels der Raumdiagonalen $\overline{EC}$ zur Diagonalen $\overline{AC}$ der Grundfläche ABCD des Quaders.
Begründen Sie, dass die Raumdiagonalen $\overline{EC}$ und $\overline{AG}$ eindeutig eine Ebene bestimmen und geben Sie eine Gleichung dieser Ebene an. Erreichbare BE-Anzahl: 4

c) Auf der Verlängerung der Kante $\overline{AE}$ über den Punkt E hinaus existiert ein Punkt K derart, dass gilt: $|\vec{EK}|=\sqrt{115}$.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes K. Erreichbare BE-Anzahl: 3

a) Ein Punkt P teilt die Kante $\overline{AB}$ im Verhältnis 2:3. Der Punkt Q ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{EF}$.
Die Strecke $\overline{PQ}$ teilt das Rechteck ABFE in zwei Trapeze.
Zeigen Sie, dass sich die Flächeninhalte dieser Trapeze wie 9:11 verhalten.
Erreichbare BE-Anzahl: 3

Teil C: Stochastik

Im ersten Quadranten des Koordinatensystems betrachten wir die Quadratfläche, die von der x-Achse, der y-Achse sowie den Geraden mit den Gleichungen 50 = x und 50 = y begrenzt wird.
In dieses Quadrat wird ein Kreis mit einem Durchmesser von 30,9 so eingezeichnet, dass er völlig innerhalb des Quadrates liegt. Zufällig wird ein Punkt auf die Quadratfläche „geworfen".

Dabei wird bei jedem „Wurf" die Quadratfläche getroffen. Die Trefferwahrscheinlichkeit ist auf dieser Fläche gleich verteilt. Landet der „geworfene" Punkt dabei innerhalb des Kreises oder auf dem Kreisbogen, dann zählt er als „Treffer", landet er außerhalb des Kreises, dann zählt er als „Niete".

a) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einem Wurf auf die Quadratfläche einen Treffer zu erzielen, etwa 0,3 beträgt. Erreichbare BE-Anzahl: 2

b) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man bei zehn Würfen genau drei Treffer erzielt. Erreichbare BE-Anzahl: 2

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei 100 Würfen die Anzahl der Treffer höchstens um zwei vom erwarteten Wert abweicht. Erreichbare BE-Anzahl: 3

d) Berechnen Sie die Anzahl der Würfe, die mindestens notwendig sind, damit die Wahrscheinlichkeit, wenigstens einen Treffer zu erzielen, mindestens 95% beträgt. Erreichbare BE-Anzahl: 2

a) Jemand behauptet, mit diesem Zufallsexperiment die Zahl ð näherungsweise bestimmen zu können. Dazu führt er zunächst das Experiment 1000 mal durch. Er zählt dabei 296 Treffer.
Geben Sie einen unter Nutzung dieser Werte bestimmten Näherungswert für π an. Erreichbare BE-Anzahl: 1

Teil D: Wahlaufgaben

Wählen Sie genau eine der folgenden Aufgaben zur Bearbeitung aus.

Aufgabe D 1: Analysis

Gegeben sind die Funktionen f durch $f(x) = 2x^2 \cdot (1{,}5 - \ln(x))$ ($x \in D_f$) und g durch $g(x) = 2x \cdot (1 - \ln(x))$ ($x \in D_g$).

a) Die Funktionen haben denselben größtmöglichen Definitionsbereich.
Geben Sie diesen an.
Begründen Sie anhand von mindestens zwei Eigenschaften der Graphen der Funktionen f und g, dass die Funktion g die erste Ableitung der Funktion f sein könnte.
Untersuchen Sie, ob die Vermutung zutrifft, dass die Funktion g die erste Ableitung der Funktion f ist. Erreichbare BE-Anzahl: 5

a) Für jedes a ($x \in \mathbb{R}$) ist eine Funktion g_a durch $g_a(x) = 2x \cdot (a - \ln(x))$ ($x \in D_{ga}$) gegeben.
Zeigen Sie, dass die Funktion a g genau eine lokale Extremstelle x_{Ea} besitzt.
Es gibt genau einen Wert a, für den gilt: $\left(x_{E_a}\right)^2 = g_a\left(x_{E_a}\right)$.
Berechnen Sie diesen Wert a. Erreichbare BE-Anzahl: 5

Aufgabe D 2: Geometrie / Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(2 | 0 | 2), B(3 | 2 | -3), C(-2 | 2 | 7) und P_a(a | 2 | 1) ($a \in \mathbb{R}$) gegeben. Die Punkte A und B liegen auf der Geraden g.

Die Gerade g und der Punkt C bestimmen eine Ebene E.

a) Zeigen Sie, dass kein Punkt P_a auf der Geraden g liegt.
Es existieren Punkte P_a, für die die Punkte A, B und P_a ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis $\overline{P_a B}$ bilden.
Ermitteln Sie die Koordinaten dieser Punkte P_a. Erreichbare BE-Anzahl: 3

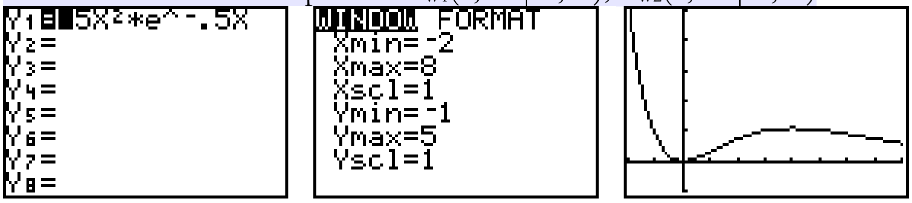
b) Ermitteln Sie alle Werte a, für die der Winkel $\sphericalangle BAP_a$ stumpf ist. Erreichbare BE-Anzahl: 2

c) Die Punkte A', B' und C' entstehen durch senkrechte Projektion der Punkte A, B und C in die x-y-Ebene und liegen auf dem Kreis k. Sie sind außerdem Eckpunkte eines rechtwinkligen Dreiecks.
Der Kreis k begrenzt die Grundfläche eines geraden Kreiskegels, dessen Spitze in der Ebene E liegt.
Bestimmen Sie das Volumen dieses Kreiskegels. Erreichbare BE-Anzahl: 5

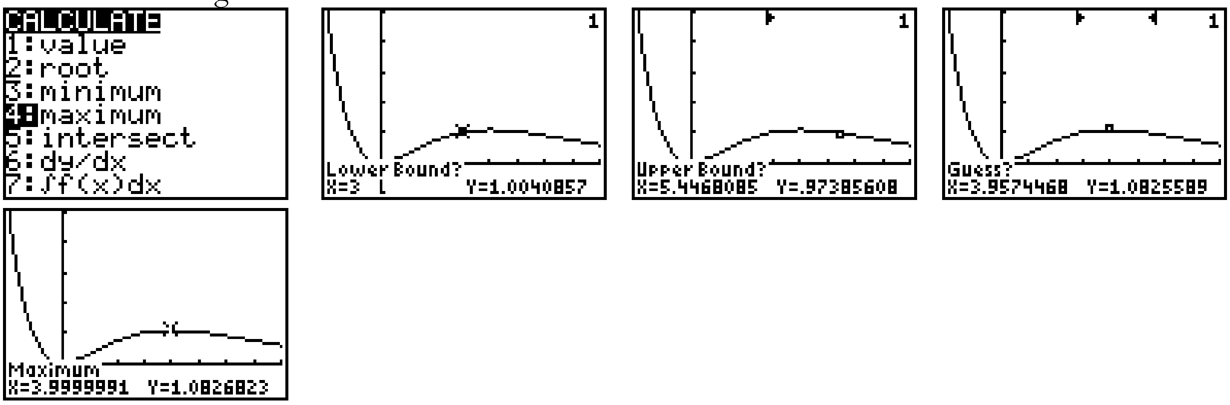
Lösungsvorschläge

Teil A

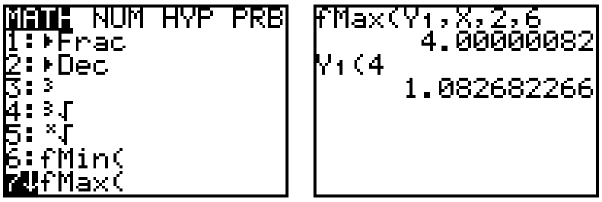
a) Nullstelle: $x_0 = 0$
Koordinaten des lokalen Maximumpunktes: $P_{MAX}(4{,}00 \mid 1{,}08)$
Koordinaten des lokalen Minimumpunktes: $P_{MIN}(0 \mid 0)$
Wendestellen: $x_{W1} = 1{,}17$; $x_{W2} = 6{,}83$
Koordinaten der Wendepunkte: $P_{W1}(1{,}17 \mid 0{,}38)$; $P_{W2}(6{,}83 \mid 0{,}77)$



Variante I: GTR grafisch

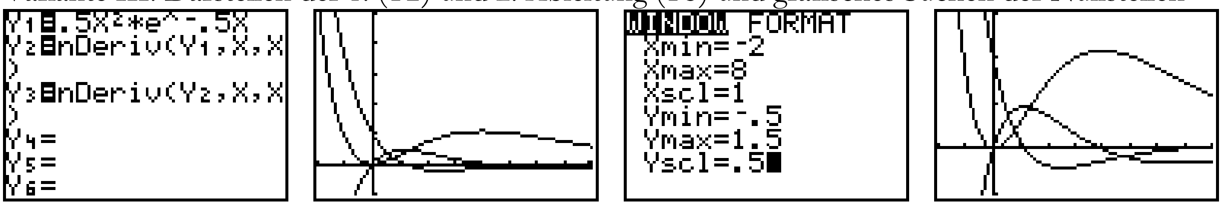


Variable II:



usw.

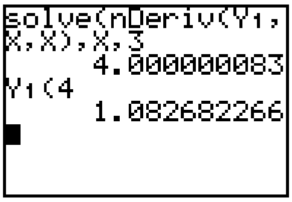
Variante III: Darstellen der 1. (`Y2`) und 2. Ableitung (`Y3`) und grafisches Suchen der Nullstellen

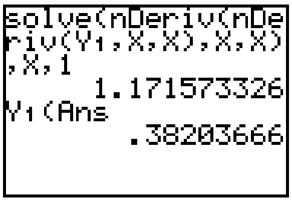


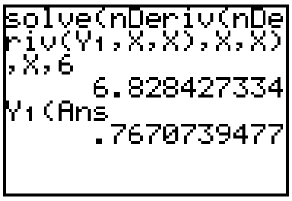
usw.[2]

Variante IV: rechnerisches Lösen – solve berechnet die Nullstellen – nDerive die 1. Ableitung und `nDerive(nDerive(...` die 2. Ableitung. Die Kombination `solve(nDerive(Y1,X,X),X,Startwert)` ergibt also in Abhängigkeit von der Wahl des Startwertes die jeweilige Extremstelle. Entsprechend ist `solve(nDerive(nDerive(Y1,X,X),X,X),X,Startwert)`
→ 1. Ableitung → 2. Ableitung

2 Die Kombination mit Variante I oder II ist sinnvoll.







Hinweis: Bei ungeeigneter Wahl des Startwerts für den zweiten Wendepunkt, kann es dazu führen, dass eine unrealistisch große Lösung angezeigt wird. Das liegt daran, dass für große x-Werte (etwa x=500) die Funktion praktisch waagerecht verläuft und der Taschenrechner dort an die Grenzen der ihm möglichen Genauigkeit stößt. In diesem Fall ist es durchaus möglich, dass der GTR auch einige Minuten rechnen muss, um überhaupt zu einer Lösung zu kommen.

Hinweis: Sind, wie im 1. Bild von Variante III die Funktionen bereits eingetragen, vereinfacht sich die Rechnung folgendermaßen:

Extrema 2: `solve(Y2,X,3)`

Wendepunkt 1: `solve(Y3,X,1)`

Wendepunkt 2: `solve(Y3,X,6)`

Variante V: rechnerisch

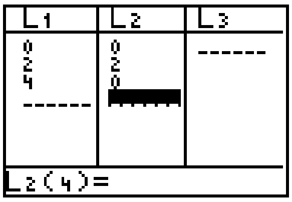
$$f'(x)=e^{-\frac{x}{2}}\cdot\frac{x\cdot(4-x)}{4}$$

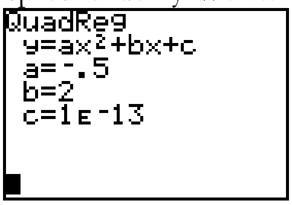
$$f''(x)=e^{-\frac{x}{2}}\cdot\frac{x^2-8x+8}{8}$$

$$f'''(x)=e^{-\frac{x}{2}}\cdot\frac{-x^2+12x-24}{16}$$

b) Ansatz: z.B. mit GTR – Menü `Stat-Edit` und `Stat-Calc-QuadReg`

Es wird davon ausgegangen, dass die Punkte (0 | 0), (2 | 2) und (4 | 0) auf der Kurve liegen. Aus Symmetriegründen {Hochpunkt ist (2 | 2)} muss (4 | 0) eine Nullstelle sein. Liste 1 enthält die x-Werte und Liste 2 die entsprechenden y-Werte.





⇒ fertig

allgemeine quadratische Gleichung: $y = q(x) = ax^2 + bx + c$

eine Gleichung des LGS:

$(0 \mid 0) \in q(x) \Rightarrow 0 = a\cdot 0 + b\cdot 0 + c \Rightarrow c = 0$

$(2 \mid 2) \in q(x) \Rightarrow 2 = a\cdot 2^2 + b\cdot 2$

$q'(2)=0 \Rightarrow 0 = 2a\cdot 2 + b$

zwei weitere Gleichungen des LGS

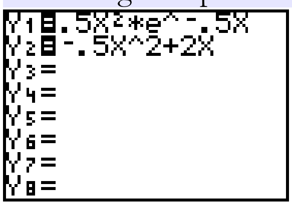
Gleichung der quadratischen Funktion: $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$

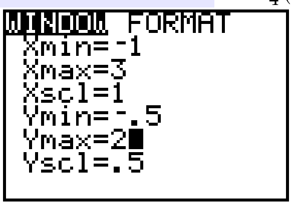
c) Ansatz für Nachweis der Stammfunktion: $F'(x) = f(x)$

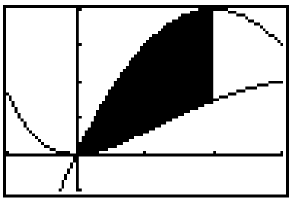
Nachweis der Stammfunktion: Produktregel anwenden

Ansatz für die spezielle Stammfunktion: $F_C(x) := F(x) + C$ mit $F_C(0) = 12 \Rightarrow C = -4$

Gleichung der speziellen Stammfunktion: $F_{-4}(x)=e^{-\frac{1}{2}x}\cdot(-x^2-4x-8)-4$







Ansatz für die Flächenberechnung: $\int\limits_0^2 q(x)-f(x)\,dx = Q(2)-Q(0)-\left(F(2)-F(0)\right)$

$Q(x)=\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+c\,x$ und im konkreten Fall: $Q(x)=-\frac{1}{6}x^3+x^2$

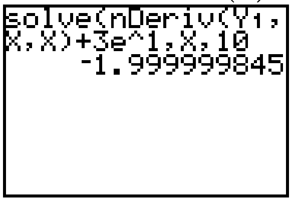
Stammfunktion der Differenzfunktion

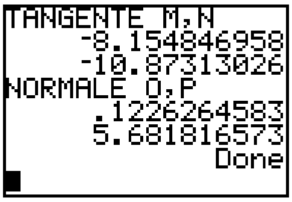
Nachweis

d) Ansatz für Berührungsstelle:

t: y = mx + n mit m = -3e = f'(x_S); der Anstieg der Funktion ist an der gesuchten Stelle x_S so groß, wie der der Parallelen:

GTR: solve(nDerive(Y1,X,X)+3e^1,X,*Startwert* wegen der Nullstellenberechnung der solve-Funktion: -3e = f'(x_S) ⇒ 0 = f'(x_S) + 3e





Berührungsstelle: x_S = -2 und n = y_S – m ·x_S

Koordinaten des Berührungspunktes

Gleichung der Tangente: y = -3ex – 4e

e) 1. Ableitung: $f_t'(x)=e^{-\frac{x}{2}}\cdot\frac{t\cdot x\cdot(4-x)}{2}$

beide mögliche Extremstellen: ändern sich gegenüber Teilaufgabe a) nicht

Da t die Funktion f(x) nur streckt oder staucht, bleibt das Extremum bei x_{MAX} = 4.

Begründung für das lokale Maximum

Wegen $f_t(4)$ = t ·16/e² und t > 0 ergibt sich zumindest eine Halbgerade (Strahl). Mit anderen Worten: die Funktionswerte sind stets größer oder gleich Null.

Gleichung der Geraden: x = 4

Begründung für Nichtnegativität

Teil B

a) Ansatz für Koordinaten des Punktes D: $\vec{OD}=\vec{OA}+\vec{BC}$

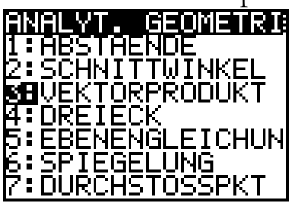
Koordinaten des Punktes D: D(-2 | 1 | -2)

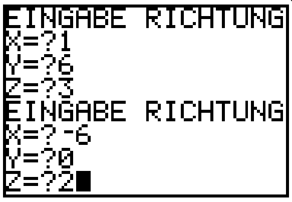
Darstellung des Prismas

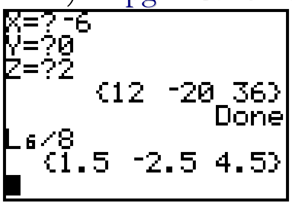
Ansatz für Nachweis:

Variante I: Skalarprodukt $\vec{AB}\cdot\vec{AE}=0$ und $\vec{AD}\cdot\vec{AE}=0$

Variante II: Vektorprodukt $\vec{AB}\times\vec{AD}=k\,\vec{AE}$ (k ∈ ℝ) → pgrmGEOMETRI



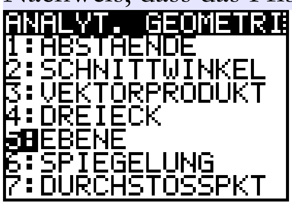


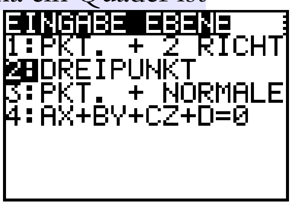


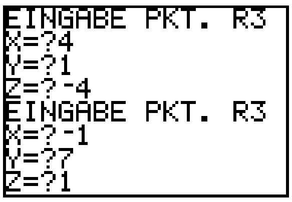
k = 8; wahre Aussage

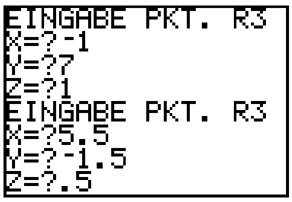
Nachweis, dass das Prisma ein Quader ist

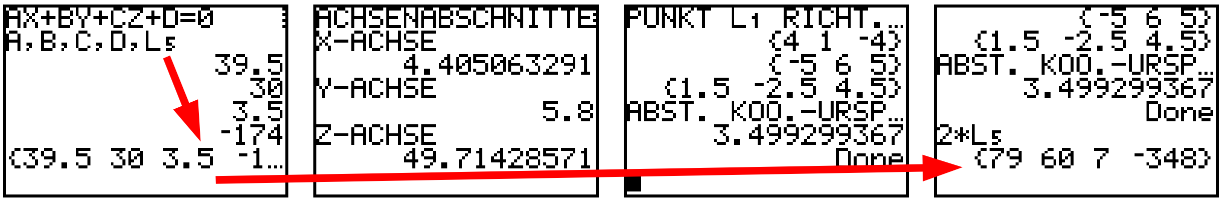
b)











Ansatz für Neigungswinkel

Variante I: Dreieck ACE ist rechtwinklig $\sin\alpha = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}$

Variante II: GTR pgrmGEOMETRI

Größe des Neigungswinkels α: α ≈ 30,0°

Begründung:

z.B. die Diagonalen haben einen gemeinsamen Schnittpunkt $\vec{OS} = \frac{\vec{OA}+\vec{OG}}{2} = \frac{\vec{OE}+\vec{OC}}{2}$

Gleichung der Ebenen mit pgrmGEOMETRI:

E: -57x – 44y + 7z + 244 = 0 bzw. E: 57x + 44y – 7z = 244

Gleichung der Ebene, z.B.: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix}$ (s, t ∈ ℝ)

c) Koordinaten des Vektors $\vec{AE} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -2{,}5 \\ 4{,}5 \end{pmatrix}$

Ansatz für Abstand:

Variante I: Normierung des Richtungsvektors $\vec{OK} = \vec{OE} + \sqrt{115} \cdot \frac{\vec{AE}}{|\vec{AE}|}$

Variante II: Gleichungssystem mit zwei Gleichungen:

I: $|\vec{EK}| = \sqrt{115}$

II: $\vec{OK} = \vec{OE} + k \cdot \vec{AE}$

aus I und II folgt III: $\sqrt{115} = |k \cdot \vec{AE}|$ und nach Quadrieren: $115 = k^2 \vec{AE}^2$

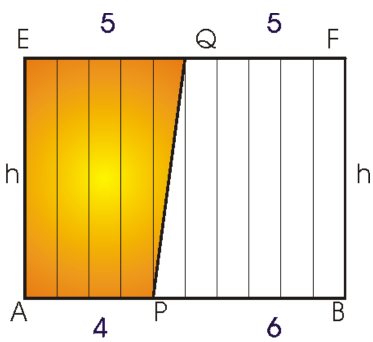
Anmerkung: Spätesten an dieser Stelle kann man sehen, dass die beiden Varianten auf das gleiche Ergebnis laufen: $k = \frac{\sqrt{115}}{|\vec{AE}|} = 2$. In Variante II könnte man noch an den negativen k-Wert denken, aber der Entfällt, da der Vektor AE die „positive“ Richtung festlegt.

Koordinaten des Punktes K: K(8,5 | -6,5 | 9,5)

d) Analyse der Aufgabenstellung: Bild

Ansatz für Nachweis: Die Höhen der Trapeze sind gleich. Bei einer Teilung wie im Bild ergibt sich eine Teilung von (4+5) : (6+5)

Nachweis



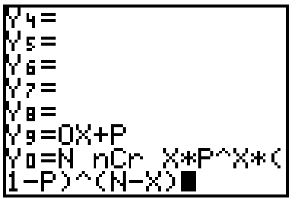
Teil C

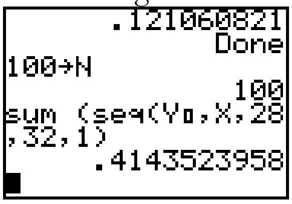
a) Ansatz für Nachweis: entscheidend sind die Flächeninhalte A_k und A_Q

Nachweis: p = π 15,45² / 50²

b) Ansatz für Wahrscheinlichkeit: $B_{10;\,0,3}(3)$
Wahrscheinlichkeit p: $p \approx 0,26681$

c) Verteilung der Zufallsgröße: $B_{100;\,0,3}(k)$
Erwartungswert: $\mu = 100 \cdot 0,3 = 30$ und
$p = B_{100;\,0,3}(28) + B_{100;\,0,3}(29) + B_{100;\,0,3}(30) + B_{100;\,0,3}(31) + B_{100;\,0,3}(32)$
GTR-Geheimtipp: mit einer eingetragenen Funktion und der Kombination der Listenfunktionen sum(seq(lässt sich das Ergebnis schnell anzeigen (auch für mehr Summanden sehr zu empfehlen). Die Variablen N und P sind zu belegen: `100→N:.3→P`; X erhält die Bedeutung von k.





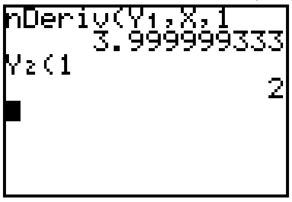
Wahrscheinlichkeit p: $p \approx 0,4144$

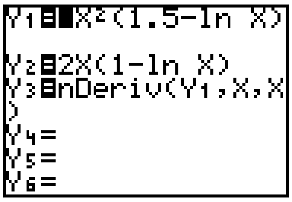
d) Ansatz für Anzahl: $1 - (1 - p)^n \geq 95\%$
Anzahl n: $n = 9$

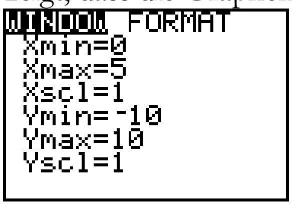
e) Wie in Teilaufgabe a) schon nachgefragt, ist $p = A_k / A_Q$. Aus $296/1000 =_? \pi \cdot 15,45^2 / 50^2$ folgt:
Näherungswert für π: $\pi \approx 3,10$

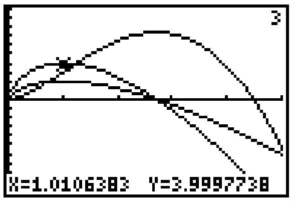
Teil D1

a) Größtmöglicher Definitionsbereich: $D_f = \mathbb{R}^+$
z.B. Aussage zum Zusammenhang zwischen lokalen Extremstellen der Funktion f und den Nullstellen der Funktion g
z.B. Aussage zur Monotonie der Funktion f und dem Vorzeichen der Funktionswerte der Funktion g
Ansatz zur Untersuchung: $f'(x) =_? g(x)$
Untersuchung: $f'(x) = 4 \cdot x - 4 \cdot x \cdot \ln(x) = 2 \cdot g(x)$
Hinweis: Die 1. Ableitungsfunktion ist nicht notwendiger Weise zu berechnen. Da $f'(x) \neq g(x)$ gilt, reicht es $f'(1)$ mit $g(1)$ zu vergleichen
GTR `nDerive(Y1,X,1)` und `Y2(1)` oder man zeigt, dass die Graphen sich unterscheiden:









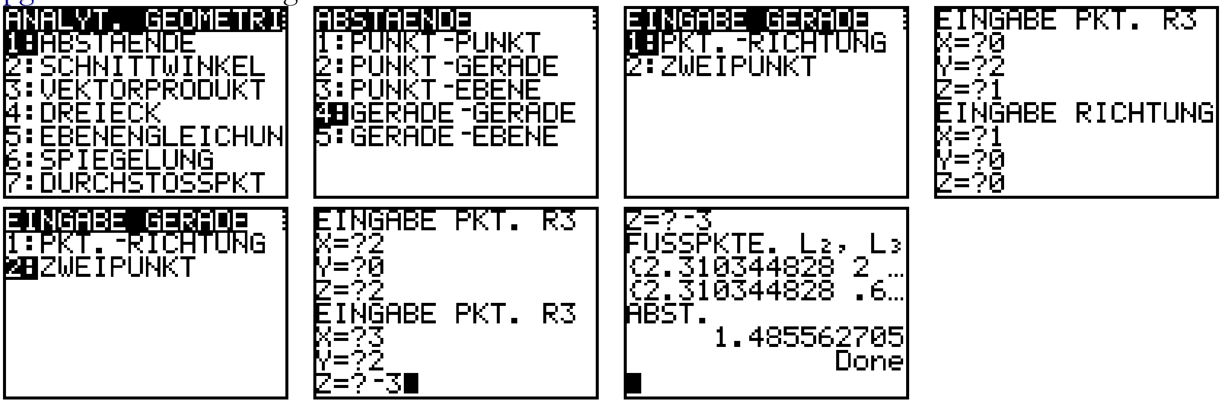
b) 1. Ableitung: $g'_a(x) = -2 \cdot \ln(x) + 2 \cdot a - 2$
mögliche Extremstelle: $x_E = e^{a-1}$
Nachweis der Extremstelle: $g'_a(x_E) = -2/x_E < 0$
Ansatz für Wert a: der Ansatz steht schon in der Aufgabenstellung $\left(x_{E_a}\right)^2 = g_a\left(x_{E_a}\right)$
Lösen der Gleichung mit GTR: `solve(` $g_a\left(x_{E_a}\right) - \left(x_{E_a}\right)^2$ `,A,`*`Startwert`*`)` ginge zwar, ist aber etwas umständlich. Vorheriges Vereinfachen führt zu `solve(2e^(A-1)-e^(2A-2),A,`*`Startwert`* und das zur Lösung.
Wert a: $a = \ln 2 + 1$

Teil D2

a) Nachweis für Punkte P_a: Das Gleichungssystem $\vec{OP}_a = \vec{OA} + s \cdot \vec{AB}$ hat für s, a $\in \mathbb{R}$ keine

Lösungen. Interpretiert man $\vec{OP}_a$ als Gerade $P_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, kann der GTR

pgrmGEOMETRI eingesetzt werden.



Der Abstand der Punkte P_a zur Geraden g beträgt also mindestens 1,4856.

Ansatz für Koordinaten der Punkte: $\overline{AB} = \overline{AP_a}$

Koordinaten der Punkte: $P_{-3}(-3 \mid 2 \mid 1)$, $P_7(7 \mid 2 \mid 1)$

b) Ansatz für Werte a: $\cos \sphericalangle BAP_a = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AP}_a}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AP}_a|} < 0$ für stumpfe Winkel also muss $\vec{AB} \cdot \vec{AP}_a < 0$

und (a-2) + 4 + 5 < 0 gelten.

Werte a: a < -7

c) Aussage zur Lage der Punkte A', B' und C': A'(2 | 0), B'(3 | 2), C'(-2 | 2)

Aus den Angaben der Aufgabenstellung folgt, dass der Mittelpunkt der Längsten Seite im Dreieck A'B'C' auch Mittelpunkt des Kreises ist. Der rechte Winkel liegt bei A' also ist M(½ | 2) und der Durchmesser des Kreises $\overline{B'C'} = 5$.

Die Spitze S liegt senkrecht über M: S(½ | 2 | z) in E_{ABC}. Es bietet sich die Koordinatenform der Ebenengleichung zur weiteren Rechnung an: GTR pgrmGEOMETRI: 4x + 3y + 2z = 12 und S liegt in dieser Ebene: 4 ½ + 3 ·2 + 2z = 12 ⇒ z = 2 = h.

Volumen des Kreiskegels: $V = 1/3\ A_G\ h = 1/3 \cdot \pi\ 2{,}5^2 \cdot 2$.

Radius der Grundkreisfläche

Gleichung der Ebene E

Höhe des geraden Kreiskegels

Volumen V: V ≈ 13,1