Sächsisches Staatsministerium
für Kultus

Schuljahr **2002/03**

Geltungsbereich:
- Allgemein bildendes Gymnasium
- Abendgymnasium und Kolleg
- Schulfremde Prüfungsteilnehmer

Schriftliche Abiturprüfung
Leistungskursfach Mathematik

- Nachtermin -

Material für den Prüfungsteilnehmer

Allgemeine Arbeitshinweise

Ihre Arbeitszeit (einschließlich der Zeit für das Lesen der Aufgabentexte und der Zeit für die Auswahl der Wahlaufgabe) beträgt **300 Minuten.**

Auf dem Deckblatt der Arbeit haben Sie den verwendeten GTR-Typ anzugeben.

Die Prüfungsarbeit besteht aus den zu bearbeitenden **Pflichttellen A, B** und **C** sowie dem **Wahlteil D.**
Es sind alle Aufgaben der Pflichtteile zu bearbeiten.
Aus dem Teil D ist **genau eine** der beiden Aufgaben zu bearbeiten.
Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionen) Hilfslinien muss deutlich erkennbar in gut lesbarer Form dargestellt werden.

Insgesamt sind 90 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar, davon

im Teil A	35 BE,
im Teil B	25 BE,
im Teil C	15 BE,
im Teil D	15 BE.

Erlaubte Hilfsmittel:
1 Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung
1 grafikfähiger, programmierbarer Taschenrechner (GTR) ohne Computer-Algebra-System
1 Tabellen- und Formelsammlung ohne ausführliche Musterbeispiele (im Unterricht eingeführt)
Zeichengeräte
beiliegende „Materialien für Aufgaben zur Stochastik"

Prüfungsinhalt

Pflichtaufgaben

Teil A: Analysis

Für jedes a $(a \in R; a > 0)$ ist eine Funktion f_a durch $f_a(x) = (2x-1) \cdot e^{ax}$ $\left(x \in D_{f_a}\right)$ gegeben.

a) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion f_a an.
Ermitteln Sie die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen der Funktion f_a mit den Koordinatenachsen und die Koordinaten der lokalen Extrempunkte (einschließlich der Art der Extrema).
Die Graphen der Funktionen f_{a1} und f_{a2} $(a_1, a_2 \in R; a_1, a_2 > 0; a_1 \neq a_2)$ besitzen emeinsame Punkte.
Zeigen Sie, dass genau zwei solcher Punkte existieren.
Geben Sie eine Gleichung der achsenparallelen Asymptote und den Wertebereich der Funktion f_a an.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

b) eigen Sie, dass für jedes a der Graph der Funktion f_a genau einen Wendepunkt besitzt.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion g, auf deren Graph alle diese Wendepunkte liegen, und geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion g an.

Erreichbare BE-Anzahl:

c) Bestimmen Sie $\int f_a(x)dx$.
Geben Sie eine Gleichung derjenigen Stammfunktion F_a an, für die gilt: $F_a(0) = 0$.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

In den folgenden Teilaufgaben wird nur die Funktion f_2 betrachtet.

d) Für jedes b $(b \in R; b < 0)$ begrenzen der Graph der Funktion f_2, die Koordinatenachsen sowie die Gerade mit der Gleichung $x = b$ eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie den Inhalt $A(b)$ dieser Fläche.
Ermitteln Sie $A(-2)$, $A(-10)$ und $A(-100)$ und geben Sie eine Vermutung für den Grenzwert $\lim\limits_{b \to -\infty} A(b)$ an.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

e) Der Graph der Funktion f_2, die Koordinatenachsen und die Gerade mit der Gleichung $x = -1$ begrenzen eine Fläche vollständig. Diese erzeugt bei Rotation um die x-Achse einen Rotationskörper.
Bestimmen Sie das Volumen dieses Rotationskörpers.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

f) Für jedes u $(u \in R, u < 0)$ sind der Punkt $P_u(u; f_2(u))$, der Koordinatenursprung und der Punkt $Q_u(u; 0)$ Eckpunkte eines Dreiecks.
Ermitteln Sie den Wert u, für den das zugehörige Dreieck den größten Flächeninhalt aller so gebildeten Dreiecke besitzt.
Geben Sie diesen maximalen Flächeninhalt an.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

Teil B: Geometrie /Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Gerade h mit der Gleichung

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \; (u \in R)$ und für jedes t $(t \in R, t \neq 0)$ eine Gerade g_t mit der Gleichung

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} \; (s \in R)$ gegeben.

a) Jede Gerade g_t schneidet die x-y-Ebene in einem Punkt D_t.
Ermitteln Sie die Koordinaten desjenigen Punktes D_t, der vom Koordinatenursprung den minimalen Abstand besitzt, Geben Sie diesen Abstand an.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

b) Alle Geraden g_t liegen in einer Ebene E.
Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Ebene in parameterfreier Form.

Die Koordinatenebenen, die Ebene E und eine weitere Ebene begrenzen ein dreiseitiges gerades Prisma mit dem Volumen 112,5.
Berechnen Sie die Größe des Oberflächeninhaltes des Prismas.

Erreichbare BE-Anzahl: 9

c) Es gibt genau zwei Geraden g_{t_1} und g_{t_2}, die die x-y-Ebene unter einem Winkel von 60° schneiden.
Ermitteln Sie für jede dieser Geraden eine Gleichung.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

d) Es gibt genau eine Gerade gt, die die Gerade h schneidet. Für diesen Fall existieren Vierecke, deren Diagonalen auf beiden Geraden liegen.
Zeigen Sie, dass es unter all diesen Vierecken Quadrate geben kann.

Unter diesen Quadraten gibt es genau eins mit dem Flächeninhalt 8,5.
Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte dieses speziellen Quadrates, die auf der Geraden h liegen.

Erreichbare BE-Anzahl: 7

Teil C: Stochastik

Bei einem Pop-Konzert werden u.a. einfarbige Tassen, Feuerzeuge und Plüschherzen als Fanartikel verkauft. Diese drei Artikel stehen in den Farben Blau, Rot, Orange und Gelb in jeweils gleicher Anzahl zur Verfügung. Ein „Fan-Set" besteht aus einem Beutel, der genau eine Tasse, genau ein Feuerzeug und genau ein Plüschherz enthält. Die Sets werden durch Schüler zusammengestellt, wobei die Auswahl der Farbe des jeweiligen Gegenstandes zufällig sein soll.

a) Geben Sie die Anzahl verschiedenartiger Sets an, die jeweils Fanartikel in drei verschiedenen Farben enthalten.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig herausgegriffenes Set Fanartikel in drei verschiedenen Farben enthält.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

b) Betrachtet werden 100 Sets. Darunter sind genau 37, die Fan-Artikel in drei verschiedenen Farben enthalten. Zehn Sets werden zufällig für den Verkauf entnommen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter diesen entnommenen Sets keins mit Artikeln in drei verschiedenen Farben befindet.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

Es sind 8% der Feuerzeuge, 5% der Tassen und 3% der Plüschherzen fehlerhaft. Die Sets werden ohne Prüfung zusammengestellt.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Set kein fehlerhaftes Teil enthält.

Ein Set gilt als mangelhaft, wenn es mindestens ein fehlerhaftes Teil enthält. Täglich werden 1200 Sets verpackt. Die Zufallsvariable X bezeichnet die Anzahl mangelhafter Sets, die an einem Tag verpackt werden.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter 1200 Sets wenigstens 158 und höchstens 207 mangelhafte befinden.

Ermitteln Sie, wie viele Sets ein Kontrolleur mindestens öffnen muss, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens 95% mindestens ein mangelhaftes Set findet?

Erreichbare BE-Anzahl: 6

d) Ein Fanartikelverkäufer behauptet, dass die Ereignisse
Ereignis A: „Unter fünf Feuerzeugen ist genau eines fehlerhaft." und
Ereignis B: „Unter vier Feuerzeugen sind genau eines oder genau zwei fehlerhaft."
mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten.
Zeigen Sie, dass diese Behauptung falsch ist.

Untersuchen Sie, ob es eine Fehlerwahrscheinlichkeit p für die Feuerzeuge gibt, für die die Aussage des Verkäufers wahr ist.
Ermitteln Sie diese Wahrscheinlichkeit bzw. begründen Sie, dass es eine solche Wahrscheinlichkeit nicht geben kann.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

Teil D: Wahlaufgaben

Wählen Sie genau eine der folgenden Aufgaben zur Bearbeitung aus.

Aufgabe D 1: Analysis

Gegeben sind ganzrationale Funktionen dritten Grades, deren Graphen durch den Punkt $P(0;-3)$ gehen und im Punkt $Q(2;1)$ ein lokales Extremum haben.

a) Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Funktion f mit der Gleichung

$y = f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 3x - 3 \quad (x \in R)$ eine solche Funktion ist.

Es existiert genau eine weitere Funktion g mit den oben genannten Eigenschaften, für die zusätzlich gilt: g'(-1) = 0.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion g.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

b) Ermitteln Sie die Funktionsgleichungen für alle derartigen Funktionen mit den anfangs genannten Eigenschaften.

Unter diesen Funktionen gibt es genau eine Funktion, die an ihrer Wendestelle den Funktionswert $\frac{3}{2}$ hat.

Ermitteln Sie eine Gleichung für diese Funktion.

Erreichbare BE-Anzahl: 10

Aufgabe D 2: Geometrie / Algebra

Eine Straße verläuft von einem Punkt A geradlinig zu einem Punkt S und von diesem geradlinig zu einem Punkt B, wobei A, S und B Punkte auf der Mittelmarkierung der Straße sind.

Die Lage der Strecken $\overline{AS}$ und $\overline{SB}$ kann in einem kartesischen Koordinatensystem beschrieben werden. Einer Längeneinheit entsprechen 10 Meter, die z-Koordinate beschreibt die Höhe über NN.

Die Punkte haben die Koordinaten $A(-5;11;0,6)$, $S(2;4;0)$ und $B(-5;-3;0,4)$.

a) Berechnen Sie die Größe des Winkels zwischen den beiden Straßenabschnitten ÄS und SB .

Erreichbare BE-Anzahl: 2

Da der Punkt S in einer Senke liegt und die Straßenabschnitte $\overline{AS}$ und $\overline{SB}$ geradlinig aufeinander stoßen, ist dieser Bereich ein Unfallschwerpunkt. Zu seiner Entschärfung sind verschiedene Baumaßnahmen geplant.

b) Im ersten Bauabschnitt soll der Punkt S in Richtung der z-Achse in eine zur x-Achse parallele, durch die Punkte A und B verlaufende Ebene angehoben werden.
Berechnen Sie, um wie viele Meter der Punkt S angehoben wird.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

Als Punkt, in dem die beiden Straßenabschnitte aufeinander stoßen, wird nun der Punkt $S^*(2;4;0,5)$ angenommen.

c) Im zweiten Bauabschnitt soll der Übergang von einem Straßenabschnitt in den anderen durch ein Bogenstück b eines Kreises k erfolgen. Die Geraden, auf denen die Strecken $\overline{AS^*}$ bzw. $\overline{S^*B}$ liegen, sind Tangenten an diesen Kreis k.
Die Berührungspunkte mit dem Kreis k sind jeweils 66 m vom Punkt S* entfernt.

Ermitteln Sie die Länge des Kreisbogens b.
Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes des Kreises k.

Erreichbare BE-Anzahl: 8