Schriftliche Abiturprüfung – Leistungskursfach – Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Aus rechtlichen Gründen möchte ich Sie darauf hinweisen, dass Sie sich auf einer **privaten** Seite befinden. Insbesondere ist dies **kein** Produkt des Sächsischen Staatsministeriums für Kultus, welches die Abituraufgaben entwickelt.

Dies ist die Abschrift der Prüfungsaufgaben 2003, wie sie vom Sächsischen Staatsministeriums für Kultus auf dem Sächsischen Schulserver (www.sachsen-macht-schule.de) veröffentlicht wurden.

Außerdem sollten Sie folgendes wissen:

- Lösungen der Aufgaben können auf unterschiedlichen Wegen erreicht werden. Hier finden Sie VORSCHLÄGE zur Lösung und VORSCHLÄGE zur Bewertung, die nicht für die Bewertung Ihres Abiturs herangezogen werden können. Dafür ist jeder prüfende Fachlehrer verantwortlich.
- Ich habe versucht, den graphikfähigen Taschenrechner (GTR – hier TI 82/83/83+) besonders häufig einzusetzen. Damit sollen Möglichkeiten aufgezeigt werden, auch wenn eine Rechnung vielleicht schneller zum Ziel führen würde.
- Eingesetzte Programme finden Sie auf den Mathe-Seiten des sächsischen Schulservers unter www.sn.schule.de/~matheabi dokumentiert und anhand von vielen Beispielen erklärt. Insbesondere möchte ich auf eine zusammenfassende Broschüre zu diesem Thema verweisen: www.sn.schule.de/~matheabi/data/gtrZsfsg.pdf.
- Die **offiziellen** Abituraufgaben werden nach Beendigung der Prüfungsphase auf dem Sächsischen Schulserver und das Nachabitur erst kurz vor dem schriftlichen Abitur des Folgejahres veröffentlicht.
- Für Nachfragen und Ihre Hinweise stehe ich Ihnen gerne zur Verfügung: F. Müller (mathe@oskar-reime-gymnasium.de) – Mathe-Lehrer.
  Dieses Dokument wurde zuletzt aktualisiert am 09.05.04.
- Wenn Sie Fehler finden oder Ergänzungen haben, teilen Sie mir das bitte mit.

Material für den Prüfungsteilnehmer

Allgemeine Arbeitshinweise

Ihre Arbeitszeit (einschließlich der Zeit für das Lesen der Aufgabentexte und der Zeit für die Auswahl der Wahlaufgabe) beträgt **300 Minuten.**

Auf dem Deckblatt der Arbeit haben Sie den verwendeten GTR-Typ anzugeben.

Die Prüfungsarbeit besteht aus den zu bearbeitenden Pflichtteilen **A, B** und **C** sowie dem **Wahlteil D.**
Es sind alle Aufgaben der Pflichtteile zu bearbeiten.
Aus dem Teil D ist **genau eine** der beiden Aufgaben zu bearbeiten.
Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionen) Hilfslinien muss deutlich erkennbar in gut lesbarer Form dargestellt werden.

Bei Verwendung von GTR-Programmen ist anzugeben, aus welchen Eingabedaten das Programm welche Ausgabendaten berechnet.

Insgesamt sind 90 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar, davon
im Teil A 35 BE,
im Teil B 25 BE,
im Teil C 15 BE,
im Teil D 15 BE.

Erlaubte Hilfsmittel:

1 Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung
1 grafikfähiger, programmierbarer Taschenrechner (GTR) ohne Computer-Algebra-System
1 Tabellen- und Formelsammlung ohne ausführliche Musterbeispiele (im Unterricht eingeführt)
Zeichengeräte
beiliegende „Materialien für Aufgaben zur Stochastik“[1]

Bewertungsmaßstab

Pkte.	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
90 BE	90-86	85-82	81-77	76-73	72-68	67-64	63-59	58-55	54-50	49-46	45-41	40-37	36-31	30-25	24-19	18-0

Prüfungsinhalt

Pflichtaufgaben

Teil A: Analysis

Für jedes a ($a \in \mathbb{R}$; $a > 0$) ist eine Funktion f_a durch $f_a(x) = (2x-1) \cdot e^{ax}$ gegeben.

a) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion a f an.
Ermitteln Sie die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen der Funktion a f mit den Koordinatenachsen und die Koordinaten der lokalen Extrempunkte (einschließlich der Art der Extrema).
Die Graphen der Funktionen f_{a_1} und f_{a_2} ($a_1, a_2 \in \mathbb{R}$; $a_1, a_2 > 0$; $a_1 \approx a_2$) besitzen gemeinsame Punkte.
Zeigen Sie, dass genau zwei solcher Punkte existieren.

1 Diese werden hier nicht wiedergegeben. Sie enthalten zumeist eine Tabelle zur Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Manchmal eine Tabelle zur Summenfunktion der Binomialverteilung. Beides kann durch Verwendung des GTR leicht ersetzt werden. Die Tabellen finden Sie im Inhalt der Online-Ausgabe dieses Textes www.sn.schule.de/~matheabi.

Geben Sie eine Gleichung der achsenparallelen Asymptote und den Wertebereich der Funktion f_a an. Erreichbare BE-Anzahl: 13

b) Zeigen Sie, dass für jedes a der Graph der Funktion f_a genau einen Wendepunkt besitzt.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion g, auf deren Graph alle diese Wendepunkte liegen, und geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion g an. Erreichbare BE-Anzahl: 9

c) Bestimmen Sie $\int f_a(x)dx$.
Geben Sie eine Gleichung derjenigen Stammfunktion F_a an, für die gilt: $F_a(0) = 0$.
Erreichbare BE-Anzahl: 4

In den folgenden Teilaufgaben wird nur die Funktion f_2 betrachtet.

d) Für jedes b ($b \in \mathbb{R}$; $b < 0$) begrenzen der Graph der Funktion f_2, die Koordinatenachsen sowie die Gerade mit der Gleichung $x = b$ eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie den Inhalt A(b) dieser Fläche.
Ermitteln Sie A(-2) , A(-10) und A(-100) und geben Sie eine Vermutung für den Grenzwert $\lim\limits_{n \to -\infty} A(b)$ an. Erreichbare BE-Anzahl: 4

e) Der Graph der Funktion f_2, die Koordinatenachsen und die Gerade mit der Gleichung $x = -1$ begrenzen eine Fläche vollständig. Diese erzeugt bei Rotation um die x-Achse einen Rotationskörper.
Bestimmen Sie das Volumen dieses Rotationskörpers. Erreichbare BE-Anzahl: 2

f) Für jedes u ($u \in \mathbb{R}$; $u < 0$) sind der Punkt $P_u(u \mid f_2(u))$, der Koordinatenursprung und der Punkt $Q_u(u \mid 0)$ Eckpunkte eines Dreiecks.
Ermitteln Sie den Wert u, für den das zugehörige Dreieck den größten Flächeninhalt aller so gebildeten Dreiecke besitzt.
Geben Sie diesen maximalen Flächeninhalt an. Erreichbare BE-Anzahl: 3

Teil B: Geometrie /Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Gerade h mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0,5 \\ 1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ ($u \in \mathbb{R}$) und für jedes t ($t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$) eine Gerade g_t mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$ ($s \in \mathbb{R}$) gegeben.

a) Jede Gerade g_t schneidet die x-y-Ebene in einem Punkt D_t.
Ermitteln Sie die Koordinaten desjenigen Punktes t D , der vom Koordinatenursprung den minimalen Abstand besitzt.
Geben Sie diesen Abstand an. Erreichbare BE-Anzahl: 5

b) Alle Geraden g_t liegen in einer Ebene E.
Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Ebene in parameterfreier Form.
Die Koordinatenebenen, die Ebene E und eine weitere Ebene begrenzen ein dreiseitiges gerades Prisma mit dem Volumen 112,5.
Berechnen Sie die Größe des Oberflächeninhaltes des Prismas. Erreichbare BE-Anzahl: 9

c) Es gibt genau zwei Geraden g_{t1} und g_{t2} , die die x-y-Ebene unter einem Winkel von 60° schneiden.
Ermitteln Sie für jede dieser Geraden eine Gleichung. Erreichbare BE-Anzahl: 4

d) Es gibt genau eine Gerade g_t, die die Gerade h schneidet. Für diesen Fall existieren Vierecke, deren Diagonalen auf beiden Geraden liegen.
Zeigen Sie, dass es unter all diesen Vierecken Quadrate geben kann.
Unter diesen Quadraten gibt es genau eins mit dem Flächeninhalt 8,5.

Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte dieses speziellen Quadrates, die auf der Geraden h liegen. Erreichbare BE-Anzahl: 7

Teil C: Stochastik

Bei einem Pop-Konzert werden u.a. einfarbige Tassen, Feuerzeuge und Plüschherzen als Fanartikel verkauft. Diese drei Artikel stehen in den Farben Blau, Rot, Orange und Gelb in jeweils gleicher Anzahl zur Verfügung. Ein „Fan-Set" besteht aus einem Beutel, der genau eine Tasse, genau ein Feuerzeug und genau ein Plüschherz enthält. Die Sets werden durch Schüler zusammengestellt, wobei die Auswahl der Farbe des jeweiligen Gegenstandes zufällig sein soll.

a) Geben Sie die Anzahl verschiedenartiger Sets an, die jeweils Fanartikel in drei verschiedenen Farben enthalten.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig herausgegriffenes Set Fanartikel in drei verschiedenen Farben enthält. Erreichbare BE-Anzahl: 2

b) Betrachtet werden 100 Sets. Darunter sind genau 37, die Fan-Artikel in drei verschiedenen Farben enthalten. Zehn Sets werden zufällig für den Verkauf entnommen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter diesen entnommenen Sets keins mit Artikeln in drei verschiedenen Farben befindet. Erreichbare BE-Anzahl: 2

Es sind 8% der Feuerzeuge, 5% der Tassen und 3% der Plüschherzen fehlerhaft. Die Sets werden ohne Prüfung zusammengestellt.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Set kein fehlerhaftes Teil enthält.
Ein Set gilt als mangelhaft, wenn es mindestens ein fehlerhaftes Teil enthält. Täglich werden 1200 Sets verpackt. Die Zufallsvariable X bezeichnet die Anzahl mangelhafter Sets, die an einem Tag verpackt werden.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter 1200 Sets wenigstens 158 und höchstens 207 mangelhafte befinden.
Ermitteln Sie, wie viele Sets ein Kontrolleur mindestens öffnen muss, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens 95% mindestens ein mangelhaftes Set findet?
Erreichbare BE-Anzahl: 6

d) Ein Fanartikelverkäufer behauptet, dass die Ereignisse
Ereignis A: „Unter fünf Feuerzeugen ist genau eines fehlerhaft." und
Ereignis B: „Unter vier Feuerzeugen sind genau eines oder genau zwei fehlerhaft."
mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten.
Zeigen Sie, dass diese Behauptung falsch ist.
Untersuchen Sie, ob es eine Fehlerwahrscheinlichkeit p für die Feuerzeuge gibt, für die die Aussage des Verkäufers wahr ist.
Ermitteln Sie diese Wahrscheinlichkeit bzw. begründen Sie, dass es eine solche Wahrscheinlichkeit nicht geben kann. Erreichbare BE-Anzahl: 5

Teil D: Wahlaufgaben

Wählen Sie genau eine der folgenden Aufgaben zur Bearbeitung aus.

Aufgabe D 1: Analysis

Gegeben sind ganzrationale Funktionen dritten Grades, deren Graphen durch den Punkt P(0 | -3) gehen und im Punkt Q(2 | 1) ein lokales Extremum haben.

a) Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Funktion f mit der Gleichung $y = f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 3x - 3$
($x \in \mathbb{R}$) eine solche Funktion ist.
Es existiert genau eine weitere Funktion g mit den oben genannten Eigenschaften, für die zusätzlich

gilt: $g'(-1) = 0$.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion g. Erreichbare BE-Anzahl: 5

a) Ermitteln Sie die Funktionsgleichungen für alle derartigen Funktionen mit den anfangs genannten Eigenschaften.
Unter diesen Funktionen gibt es genau eine Funktion, die an ihrer Wendestelle den Funktionswert $\frac{3}{2}$ hat.
Ermitteln Sie eine Gleichung für diese Funktion. Erreichbare BE-Anzahl: 10

Aufgabe D 2: Geometrie / Algebra

Eine Straße verläuft von einem Punkt A geradlinig zu einem Punkt S und von diesem geradlinig zu einem Punkt B, wobei A, S und B Punkte auf der Mittelmarkierung der Straße sind.
Die Lage der Strecken $\overline{AS}$ und $\overline{SB}$ kann in einem kartesischen Koordinatensystem beschrieben werden. Einer Längeneinheit entsprechen 10 Meter, die z-Koordinate beschreibt die Höhe über NN.
Die Punkte haben die Koordinaten A(-5 | 11 | 0,6), S(2 | 4 | 0) und B(-5 | -3 | 0,4).

a) Berechnen Sie die Größe des Winkels zwischen den beiden Straßenabschnitten $\overline{AS}$ und $\overline{SB}$.
Erreichbare BE-Anzahl: 2

Da der Punkt S in einer Senke liegt und die Straßenabschnitte $\overline{AS}$ und $\overline{SB}$ geradlinig aufeinander stoßen, ist dieser Bereich ein Unfallschwerpunkt. Zu seiner Entschärfung sind verschiedene Baumaßnahmen geplant.

b) Im ersten Bauabschnitt soll der Punkt S in Richtung der z-Achse in eine zur x-Achse parallele, durch die Punkte A und B verlaufende Ebene angehoben werden.
Berechnen Sie, um wie viele Meter der Punkt S angehoben wird. Erreichbare BE-Anzahl: 5

Als Punkt, in dem die beiden Straßenabschnitte aufeinander stoßen, wird nun der Punkt S^*(2 | 4 | 0,5) angenommen.

c) Im zweiten Bauabschnitt soll der Übergang von einem Straßenabschnitt in den anderen durch ein Bogenstück b eines Kreises k erfolgen. Die Geraden, auf denen die Strecken $\overline{AS^*}$ bzw. $\overline{S^*B}$ liegen, sind Tangenten an diesen Kreis k.
Die Berührungspunkte mit dem Kreis k sind jeweils 66 m vom Punkt S* entfernt.
Ermitteln Sie die Länge des Kreisbogens b.
Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes des Kreises k.
Erreichbare BE-Anzahl: 8

Lösungsvorschläge

Teil A

a) größtmöglicher Definitionsbereich: {x | x ∈ $\mathbb{R}$}
Koordinaten des Schnittpunktes mit der y-Achse: $S_y(0 \mid -1)$
Koordinaten des Schnittpunktes mit der x-Achse: $S_x(0{,}5 \mid 0)$
1. Ableitung: $f'_a(x)=e^{ax}\cdot(2\cdot a\cdot x-a+2)$
mögliche Extremstelle: x_e (siehe unten)
2. Ableitung: $f''_a(x)=a\cdot e^{ax}\cdot(2\cdot a\cdot x-a+4)$

Nachweis der Art des Extremums: $f''_a(\frac{a-2}{2a})=2ae^{\frac{a}{2}-1}\underset{a>0}{>0}$ ⇒ lokales Minimum

Koordinaten des lokalen Extrempunktes: $x_e=\frac{a-2}{2a}$ und $y_e=-\frac{2}{a}\cdot e^{\frac{a-2}{2}}$

Ansatz für Nachweis:
Ich finde eine Umbenennung besser: $a_1 = a$; $a_2 = b$ mit $a \neq b$.
$f_a(x) = f_b(x) \Rightarrow (2x-1)\cdot e^{ax} = (2x-1)\cdot e^{bx} \Rightarrow e^{ax} = e^{bx}$; eine Lösung[2] ergibt sich aus $2x-1=0$; eine weitere Lösung aus $ax = bx \Rightarrow (a-b)x = 0 \Rightarrow x = 0$; wegen $a \neq b$ gibt es keine weiteren gemeisamen Punkte[3].
Aussage zu einer Schnittstelle: $x_{Sx} = ½$
Aussage zur zweiten Schnittstelle und Ausschluss weiterer Schnittstellen: $x_{Sy} = 0$
Gleichung der achsenparallelen Asymptote: $y = 0$ wegen $\lim\limits_{x\to-\infty} f_a(x)=0$

Wertebereich: {y | y ∈ $\mathbb{R}$, $y \geq y_e$}

b) mögliche Wendestelle: Es gibt für $f''_a(x_W) = 0$ nur eine Lösung x_W (siehe unten)
3. Ableitung: $f'''_a(x)=a^2\cdot e^{ax}\cdot(2\cdot a\cdot x-a+6)$

Nachweis und Begründung der Einzigkeit: $f'''_a(\frac{a-4}{2a})=2ae^{\frac{a}{2}-2}\neq 0$

Koordinaten des Wendepunktes: $x_W=\frac{a-4}{2a}$ (Gleichung 1) und $y_W=-\frac{4}{a}\cdot e^{\frac{a-4}{a}}$ (Gleichung 2)

Ansatz für Gleichung der Funktion g: Gleichungen 1 und 2
Wert a in Abhängigkeit von x
Umformungen

Gleichung der Funktion g: $g(x)=(2x-1)\cdot e^{\frac{-4x}{2x-1}}$
Definitionsbereich der Funktion g: {x | x ∈ $\mathbb{R}$, $y \neq 0{,}5$}

c) Ansatz für unbestimmtes Integral:
$\int f_a(x)\,dx=2\cdot\int x\,e^{ax}\,dx-\int e^{ax}\,dx$ und partielle Integration des ersten Summanden
Umformungen

unbestimmtes Integral: $\int f_a(x)\,dx=e^{ax}\cdot\left(\frac{2ax-a-2}{a^2}\right)+C$

Gleichung für F_a: $F_a(x)=e^{ax}\cdot\left(\frac{2ax-a-2}{a^2}\right)+\frac{a+2}{a^2}$

2 Es gilt in diesem Fall $f_a(x) = 0 = f_b(x)$.
3 Dass die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen gemeint sind, hätte man schon vorher merken können, denn diese hängen nicht von a ab. Somit sind sie allen Kurven gemein. Der Nachweis, dass es keine weiteren Möglichkeiten gibt, muss aber trotzdem geführt werden.

d) Ansatz: $\int_{b}^{0} f_2(x)dx = |F_2(0) - F_2(b)|$

Anmerkung: Die Formulierung „ ... *begrenzen der Graph der Funktion f_2, die Koordinatenachsen sowie die Gerade mit der Gleichung $x = b$* **eine** *Fläche vollständig.*" finde ich, kann auch als

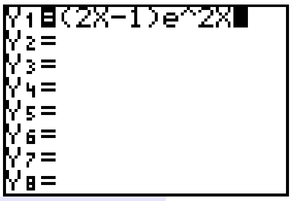
$\int_{b}^{1/2} f_2(x)dx = \left|F_2(\frac{1}{2}) - F_2(b)\right|$ gedeutet werden. Diese Interpretation ist möglich, weil meiner Meinung nach nicht klar ist, ob eine „begrenzende" Achse die Fläche automatisch in zwei Teile zerschneidet. Die Rechnung wird dadurch jedenfalls nicht einfacher. Deshalb würde ich auch diesen Ansatz gelten lassen. Die unten stehenden Angaben sind entsprechend anzupassen.

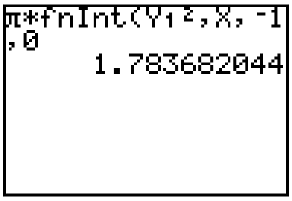
Flächeninhalt A(b): $A(b) = 1 + (b - 1) \cdot e^{2b}$

spezielle Flächeninhalte: A(-2) ≈ 0,945; A(-10) ≈ 0,99999998 und A(-100) ≈ 1

Vermutung: lim A(b) ≈ 1

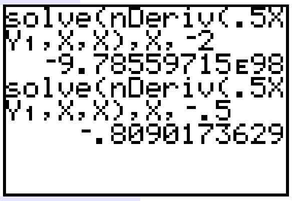
e) Ansatz für Volumen: $V = \pi \cdot \int_{-1}^{0} f_2^2(x)dx$ (oder $V = \pi \cdot \int_{-1}^{1/2} f_2^2(x)dx$)

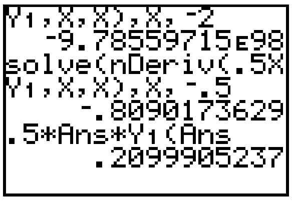
GTR: 



Volumen: V ≈ 1,78

f) Zielfunktion

GTR: 



Wert u: u ≈ -0,81

maximaler Flächeninhalt: A(-0,81) ≈ 0,21

Teil B

a) Ansatz für Koordinaten des Punktes D_t: $D_t = g_t \cap E_{xy}$ und mit E_{xy}: z = 0 (x, y ∈ ℝ) folgt $0 = 4 + s \cdot t$

Koordinaten des Punktes D_t in Abhängigkeit von t: $D_t\left(\frac{t-16}{2t} \middle| \frac{4t-4}{t} \middle| 0\right)$

Ansatz für minimalen Abstand: $d_t^2 = \left(\frac{t-16}{2t}\right)^2 + \left(\frac{4t-4}{t}\right)^2$ und weiter mit GTR:

`Y1` = $d^2_{x=t}$

`solve(nDerive(Y1,X,X),X,1)` → 4 und d^2_t = `Y1(4)` → 11,25

Koordinaten des Punktes D_4: $D_4(-1{,}5 \mid 3 \mid 0)$

minimaler Abstand: d ≈ 3,35

b) Ansatz für Gleichung der Ebene E

Variante 1:

I: x = 0,5 + 2s
II: y = 4 + s
III: z = 4 + ts

II in I: 2x = 1 + 4(y – 4) ⇒ Ebene in besonderer Lage (parallel zur z-Achse (z ∈ ℝ))
II in III: z = 4 + t(y – 4)

Gleichung der Ebene E: 2x – 4y = -15 (z ∈ ℝ)

Variante 2:

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}0{,}5\\4\\4\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}5\\4\\4\end{pmatrix}+\underbrace{s\cdot t}_{r\in\mathbb{R}}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}5\\4\\4\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$$

Nebenbei: zur Kontrolle lässt sich jetzt schnell mit der Abstandsberechnung der Koordinatenform $d_{min}=\frac{15}{\sqrt{20}}\approx 3{,}3541$ nachprüfen.

Schnittpunkte der Ebene E mit der x- und der y-Achse:
Die Schnittpunkte ergeben sich aus der Spurgeraden der Ebene E: 15 = -2x + 4y und z = 0. Die Grundfläche ist dann das rechtwinklige Dreieck, dass durch diese Gerade und die Koordinatenachsen gebildet wird: $A_G=\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{2}\cdot\frac{15}{4}=\frac{225}{16}$

Ansatz für Flächeninhalt der Grundfläche des Prismas
Flächeninhalt der Grundfläche des Prismas: A_G siehe oben
Ansatz für Höhe des Prismas: $V = A_G \cdot h$
Höhe des Prismas: h = 8
Ansatz für Oberflächeninhalt:
$A_O = 2A_G + h \cdot U$

dabei ist U der Umfang des oben genannten Dreiecks $U=\frac{15}{2}+\frac{15}{4}+\sqrt{\frac{15}{2}^2+\frac{15}{4}^2}$

Oberflächeninhalt A_O: $A_O \approx 185{,}2$

c) benötigte Vektoren

Ansatz für Werte t: $\sphericalangle\left(\begin{pmatrix}2\\1\\t\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=30°$, da es sich hier um den Normalenvektor und den Richtungsvektor der Geraden handelt bzw. $\sin\left(\frac{t}{\sqrt{5+t^2}}\right)=60°$.

Werte t: $t = \pm\sqrt{15}$

Gleichungen der Geraden, z.B.: $g_1:\vec{x}=\begin{pmatrix}0{,}5\\4\\4\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-\sqrt{15}\end{pmatrix}$ $g_1:\vec{x}=\begin{pmatrix}0{,}5\\4\\4\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\\sqrt{15}\end{pmatrix}$ (r, s ∈ ℝ)

d) Ansatz für Wert t:
Quadrate kann es nur geben, wenn die Diagonalen sich senkrecht schneiden. Untersuchen wir also zunächst für welche Werte von t die Diagonalen senkrecht sind und überprüfen später, ob sie sich auch schneiden.

$$\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\t\end{pmatrix}=4+t=0$$

Wert t: t = -4
Nachweis, dass ein Quadrat existieren kann:
Für diesen Fall kann der Schnittpunkt mit dem GTR bestimmt werden:

prgmGEOMETRI Menü Abstände → $S(\frac{3}{2}|\frac{9}{2}|2)$

Koordinaten des Schnittpunktes der Diagonalen: S (1,5 | 4,5 | 2)
Länge der Diagonalen: $\sqrt{17}$
Ansatz für Koordinaten der Eckpunkte:

Ein möglicher Ansatz wäre das Bilden eines Kreise k: $(x-\frac{3}{2})^2+(y-\frac{9}{2})^2+(z-2)^2=\frac{17}{4}$, um danach die Schnittpunkte mit der Gerade h zu berechnen. Aber es gibt einen kürzeren Weg – das normieren des Richtungsvektors der Geraden h:

$$\overrightarrow{OP_{1/2}}=\begin{pmatrix}3/2\\9/2\\2\end{pmatrix}\pm\frac{\sqrt{17}}{2}\cdot\frac{\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{17}}=\begin{pmatrix}3/2\\9/2\\2\end{pmatrix}\pm\begin{pmatrix}0\\2\\1/2\end{pmatrix}$$

Koordinaten der Eckpunkte: $P_1(1{,}5 \mid 6{,}5 \mid 2{,}5)$, $P_2(1{,}5 \mid 2{,}5 \mid 1{,}5)$

Teil C

a) Anzahl: n = 24
Wahrscheinlichkeit p: p = 0,3750

b) Ansatz für Wahrscheinlichkeit: hypergeometrische Verteilung

$$P(X=0)=\frac{\binom{37}{0}\cdot\binom{63}{10}}{\binom{100}{10}}$$

Wahrscheinlichkeit p: p ≈ 0,0074
Wahrscheinlichkeit p, dass ein Set kein fehlerhaftes Teil enthält: p ≈ 0,8478
P(A) = 0,92 · 0,95 · 0,97
Wahrscheinlichkeit p, dass das Set mindestens ein fehlerhaftes Teil enthält: p ≈ 0,1522 = 1 – P(A)
Ansatz für Wahrscheinlichkeit P(158 ≤ X ≤ 207):
$\mu \approx 182{,}664$; $\sigma \approx 12{,}444$ und Näherungsformel von LAPLACE
Wahrscheinlichkeit: P(158 ≤ X ≤ 207) ≈ 0,9556 (In Abhängigkeit vom verwendeten Lösungsverfahren und von eingesetzten Rechenhilfsmitteln kann die Wahrscheinlichkeit im Intervall 0,9500 ≤ P ≤ 0,9600 liegen.)
Ansatz für Anzahl: da $n \ll 1200 \Rightarrow 1 - 0{,}1522^n \geq 0{,}95 \Rightarrow n > 18{,}14$
Anzahl n: n = 19

c) eine Wahrscheinlichkeit: $P(A) = B_{5;\,0{,}08}(1) = 0{,}2866$
Nachweis: $P(B) = B_{4;\,0{,}08}(1) + B_{4;\,0{,}08}(2) = 0{,}2817 \neq P(A)$
Ansatz für Untersuchung: P(A) = P(B)

$$\binom{5}{1}\cdot p^1\cdot(1-p)^4=\binom{4}{1}\cdot p^1\cdot(1-p)^3+\binom{4}{2}\cdot p^2\cdot(1-p)^2 \qquad \text{(Gleichung 3)}$$

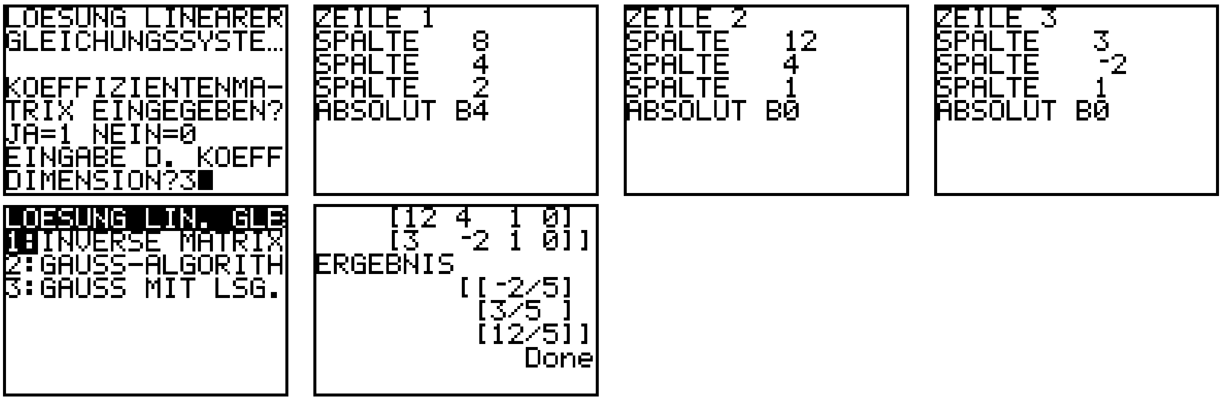
Untersuchung: aus Gleichung 3 folgt $0 = 5p^2 - 12p + 1$
Ergebnis: p ≈ 0,0864

Teil D1

a) Nachweis des lokalen Extremums der Funktion f
Nachweis für die Punkte P und Q
Gleichungssystem:

I: $P \in G_f$	$f(0) = -3$	⇒	$d = -3$
II: $Q \in G_f$	$f(2) = 1$	⇒	$8a + 4b + 2c = 4$
III:	$f'(2) = 0$	⇒	$12a + 4b + c = 0$
IV:	$f'(-1) = 0$	⇒	$3a - 2b + c = 0$

Lösungen mit GTR: prgmLINEARGS



zwei Gleichungen des Gleichungssystems
alle Gleichungen des Gleichungssystems

Gleichung der Funktion g: $g(x)=-\frac{2}{5}x^3+\frac{3}{5}x^2+\frac{12}{5}x-3$

b) lineares Gleichungssystem:

I: $P \in G_f$	$f(0) = -3$	$\Rightarrow$	$d = -3$
II: $Q \in G_f$	$f(2) = 1$	$\Rightarrow$	$8a + 4b + 2c = 4$
III:	$f'(2) = 0$	$\Rightarrow$	$12a + 4b + c = 0$

Umformen führt z. B. zu $b = -4a - 1$ und $c = 4a + 4$. Damit ist die Funktion in Abhängigkeit von a gefunden: $f_a(x)=ax^3+(-4a-1)x^2+(4a+4)x-3$ ($a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$)

allgemeine Lösung des linearen Gleichungssystems
Ansatz für Existenznachweis
Ausschluss eines Wertes des Parameters
Ausschluss[4] des zweiten Wertes des Parameters und Angabe der Gleichungen aller Funktionen,

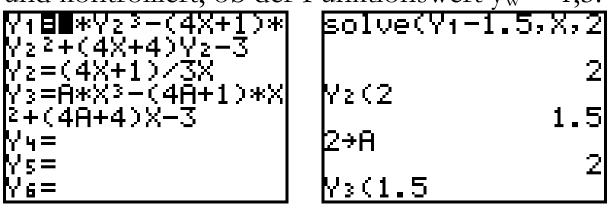
z.B.: $f_c(x)=\frac{c-4}{4}x^3+(3-c)x^2+cx-3$ ($c \in \mathbb{R}$, $c \neq 4$)

Ansatz für Wendestellen: $f_a''(x_W)=0 \wedge f(x_W)=\frac{3}{2}$

hinreichendes Kriterium[5]

Wendestellen: $x_w=\frac{4a+1}{3a}$

Ansatz für Wert des Parameters: siehe oben
Y2 – die Wendestelle in Abhängigkeit von a (wurde hier durch X ersetzt)
Y1 – der Funktionswert von f_a an der Wendestelle (a wieder durch X ersetzt)
Y3 – $f_a(x)$
Damit gelingt es, diese Aufgabe mit dem GTR zu lösen. Wie im 2. Bild zu sehen ist, wird zunächst die Gleichung $f_a(x_W) = 1{,}5$ gelöst. Das ergibt a = 2. Danach wird die Wendestelle berechnet $x_W = 1{,}5$ und kontrolliert, ob der Funktionswert $y_W = 1{,}5$.



Gleichung der Funktion, z.B.: $f_{c=12}(x)=2x^3-9x^2+12x-3$

4 Mir persönlich ist unverständlich, wieso im Erwartungsbild (nur für die prüfenden Fachlehrer) 1 BE für den Ausschluss eines zweiten Parameters angeführt wird. Außerdem ist es rätselhaft, von welcher Existenznachweis gemeint ist.

5 Im zweiten Teil der Aufgabe ist die Bewertung ebenso unklar. Eine Funktion 3. Grades hat nun mal nur (und immer nur) einen Wendepunkt. Das hinreichende Kriterium zu überprüfen, scheint mir überflüssig zu sein, zumal die Behauptung im Aufgabentext „ ... gibt es genau eine Funktion" diesen Schluss vorwegnimmt.

Teil D2

a) Ansatz für Größe des Winkels
Größe des Winkels α: α = 89,9°

b) Ansatz für Gleichung der Ebene: $E: \vec{x} = \vec{OA} + p \cdot \vec{AB} + q \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (p, q ∈ ℝ)

Gleichung der Ebene
Ansatz zur Berechnung der z-Koordinate des angehobenen Punktes:

$$\vec{OS^*} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ z \end{pmatrix} = \vec{OA} + p \cdot \vec{AB} + q \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

z-Koordinate des angehobenen Punktes: z = ½ (p = ½; q = 7)
Höhendifferenz h: h = 5m

c) Größe des Winkels zwischen den angehobenen Straßenabschnitten: 89,994°
Da das Dreieck AS^*B annähernd rechtwinklig ist, ergibt sich die gesuchte Bogenlänge, als die eines Viertelkreises mit dem Radius 66 m ⇒ b = 2π ·66m/4 = 103,67 m.
Ansatz für Radius des Kreises k
Radius des Kreises k
Länge des Kreisbogens b: b ≈ 104 m

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OS^*} + 6{,}6 \cdot \frac{\overrightarrow{S^*A}}{\left|\overrightarrow{S^*A}\right|} + 6{,}6 \cdot \frac{\overrightarrow{S^*B}}{\left|\overrightarrow{S^*B}\right|} = \begin{pmatrix} -7{,}\overline{3} \\ 4 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} \quad \text{(Normierung)}$$

Ansatz[6] für Koordinaten eines Berührungspunktes
Koordinaten eines Berührungspunktes
Ansatz für Koordinaten des Mittelpunktes
Koordinaten des Mittelpunktes M: M(-7,3 | 4,0 | 0,5) (Näherungswerte)

6 Wäre das Dreieck nicht rechtwinklig, würde sich eine kompliziertere Rechnung anschließen. In diesem Fall müssten die Berührungspunkte in Abhängigkeit von $\sphericalangle(AS^*B)$ anders festgelegt werden. Schon die Formulierung „ ... jeweils 66 m“ impliziert die Rechtwinkligkeit des Dreiecks.