Teil A Analysis

gegeben $f_a(x)=(2x-1)e^{ax} \quad (x\in D_{f_a}; a\in R, a>0)$

a) - Angabe des größtmöglichen Definitionsbereiches

Beschränkungen durch enthaltene elementare Fktn: keine

Beschränkungen durch Art der Zusammensetzung: keine

$D_{f_a}: x\in R$

Ermittlung

- Schnittpunkt mit y-Achse

$f_a(0)=(0-1)e^0=-1 \Rightarrow S_{f_a,y}(0;-1)$

- Schnittpunkt mit x-Achse

$$f_a(x_N)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1.\ 0=2x_N-1 \Leftrightarrow x_N=\dfrac{1}{2} \Rightarrow S_{f_a,x}\left(\dfrac{1}{2};0\right) \\ 2.\ 0=e^{ax}\ \textit{keine Lösung} \end{cases}$$

- Koordinaten und Art der lokalen Extrempunkte

I. mögliche Extremstellen (notwendige Bedingung für Existenz von Extrema $f_a'(x_E)=0$)

$$f_a'(x)=2e^{ax}+(2x-1)ae^{ax}=(2ax-a+2)e^{ax}$$

$$f_a'(x_E)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1.\ 0=2ax_E-a+2 \Leftrightarrow x_E=\dfrac{a-2}{2a} \\ 2.\ 0=e^{ax}\ \textit{keine Lösung} \end{cases}$$

II. Nachweis und Art der Extrema

$$f_a''(x)=2ae^{ax}+(2ax-a+2)ae^{ax}=(2ax-a+4)ae^{ax}$$

$$f_a''(x_E)=\left(2a\frac{a-2}{2a}-a+4\right)ae^{a\frac{a-2}{2a}}=(a-2-a+4)ae^{\frac{a}{2}-1}=2ae^{\frac{a}{2}-1}\overset{a>0}{>}0 \Rightarrow \text{lok. Minimum}$$

III. Berechnung der y-Koordinate

$$f_a(x_E)=\left(2\frac{a-2}{2a}-1\right)e^{\frac{a}{2}-1}=\left(1-\frac{2}{a}-1\right)e^{\frac{a}{2}-1}=-\frac{2}{a}e^{\frac{a}{2}-1}\Rightarrow \boxed{T\left(\frac{a-2}{2a};-\frac{2}{a}e^{\frac{a}{2}-1}\right)}$$

- Nachweis, dass alle Funktionen der Schar genau 2 gemeinsame Pkte besitzen

$$f_{a_1}(x_S)=f_{a_2}(x_S)\Leftrightarrow$$

$$(2x_S-1)e^{a_1x_S}=(2x_S-1)e^{a_2x_S}\overset{2x_S-1\neq 0}{\Leftrightarrow} e^{a_1x_S}=e^{a_2x_S}\Leftrightarrow a_1x_S=a_2x_S\Leftrightarrow x_{S1}=0$$

$$\Updownarrow\ 2x_S-1=0$$

$$x_{S2}=x_N=\frac{1}{2}$$

Die beiden gemeinsamen Punkte sind die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen!

Angabe der Achsenparallelen Asymptote: $\boxed{y=0}$ (aus $\lim\limits_{x\to-\infty} f_a(x)$)

- Angabe des Wertebereiches: $W_{f_a}: y\in R, y\geq y_T=-\dfrac{2}{a}e^{\frac{a}{2}-1}$ (stetige Fkt mit lok. Min.)

b) - Nachweis, dass alle f_a genau einen Wendepunkt haben

I. notwendige Bedingung für die Existenz von WP:

$$f_a''(x_W)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1.\ 2ax_W-a+4=0 \Leftrightarrow x_W=\dfrac{a-4}{2a} \\ 2.\ ae^{ax_W}=0\ \text{keine Lösung} \end{cases}$$

II. Nachweis der Existenz

$$f_a'''(x)=2aae^{ax}+(2ax-a+4)a^2e^{ax}=(2ax-a+6)a^2e^{ax}$$

$$f_a'''(x_W)=\left(2a\frac{a-4}{2a}-a+6\right)a^2e^{a\frac{a-4}{2a}}=2a^2e^{\frac{a-4}{2}}\neq 0 \Rightarrow \text{WP existiert an der Stelle } x_W$$

aus I. und II. folgt, dass jede f_a genau einen WP besitzt

Aufstellung der Ortskurve der WP

$$x_W = \frac{a-4}{2a} \Leftrightarrow 2ax_W = a-4 \Leftrightarrow 4 = a - 2ax_w = a(1-2x_W) \Leftrightarrow a = \frac{4}{1-2x_W}$$

$$f_a(x_W) = (2x_W - 1)e^{\frac{4}{1-2x_W}x_W} \Rightarrow g(x) = (2x-1)e^{\frac{4x}{1-2x}}$$

Untersuchung des Definitionsbereiches von g

Beschränkungen durch enthaltene elementare Fktn: $t(x) = \frac{4x}{1-2x} \overset{def.}{\Leftrightarrow} 1-2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}$

Beschränkungen durch Art der Zusammensetzung: keine

$$D_g : x \in R, x \neq \frac{1}{2}$$

c) - Berechnung der unbestimmten Integrals $\int f_a(x)dx$

Analyse des Funktionsterms:

$$f_a(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) = f_1(x) \cdot a(i(x))$$

Funktionsterm ist ein Produkt aus 2 Faktoren, wobei der 2. Faktor eine verkettete Funktion mit linearer innere Funktion ist

Bereitstellung der zu verwendenden Integrationsregeln

partielle Integration: $\int (f_1(x)f_2(x))dx = f_1(x)F_2(x) - \int (f_1'(x)F_2(x))dx$

zur Bestimm. der Stammfkt. F_2: $F_2(x) = \frac{1}{m}A(i(x))$

$$f_1(x) = 2x-1: \quad f_1'(x) = 2$$

$$f_2(x) = e^{ax} : \left\{ \begin{array}{l} a(i) = e^i : \quad A(i) = e^i \\ i(x) = ax : \quad m = a \end{array} \right\} \quad F_2(x) = \frac{1}{a}e^{ax}$$

Berechnung des Integrals

$$I = (2x-1)\frac{1}{a}e^{ax} - \int\left(2\frac{1}{a}e^{ax}\right)dx = (2x-1)\frac{1}{a}e^{ax} - \frac{2}{a}\int e^{ax}dx =$$

$$= (2x-1)\frac{1}{a}e^{ax} - \frac{2}{a}\frac{1}{a}e^{ax} + c = \frac{1}{a}\left(2x-1-\frac{2}{a}\right)e^{ax} + c$$

Berechnung derjenigen Funktion für die $F_{a_0}(0) = 0$

$$F_{a_0}(0) = \frac{1}{a_0}\left(2\cdot 0 - 1 - \frac{2}{a_0}\right)e^{a_0\cdot 0} + c = \frac{1}{a_0}\left(-1-\frac{2}{a_0}\right)\cdot 1 + c = c - \frac{1}{a_0} - \frac{2}{a_0^2} = 0 \Leftrightarrow c = \frac{1}{a_0} + \frac{2}{a_0^2}$$

$$F_{a_0}(x) = \frac{1}{a_0}\left(2\cdot x - 1 - \frac{2}{a_0}\right)e^{a_0\cdot x} + \frac{1}{a_0} + \frac{2}{a_0^2}$$

d) - Berechnung der Fläche

$$A = \left|\int_b^0 f_2(x)dx\right| = \left|\left[\frac{1}{2}(2x-1-1)e^{2x}\right]_b^0\right| = \left|\left[(x-1)e^{2x}\right]_b^0\right| = \left|(b-1)e^{2b} - (0-1)e^0\right| =$$

$$= \left|(b-1)e^{2b} + 1\right| = A(b)$$

b	-2	-10	-100
$A(b)$	0,945	0,9999	1

Vermutung für den Grenzwert: $\lim\limits_{b\to-\infty} A(b) = 1$

e) - Berechnung eines Rotationsvolumens um die x-Achse

$$V_{rx} = \left|\pi\int_{-1}^{0}(f_2(x))^2 dx\right| \overset{GTR}{\approx} 1{,}78$$

f) - Extremwertproblem

Aufstellung der Zielfunktion

Extremgröße: Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks $A_D = \frac{1}{2}ab$

Nebenbedingungen: $a = |u|$
$b = |f_2(u)| = |(2u-1)e^{2u}|$

Zielfunktion: $A_D = \frac{1}{2}|u||(2u-1)e^{2u}| = A_D(u) \quad (u \in R, u < 0)$

Berechnung des lok. Maximums der Zielfunktion (GTR): $H(-0{,}81;0{,}21,)$

Für $u = -0{,}81$ hat das zugehörige Dreieck den maximalen Flächeninhalt von 0,21FE.

Teil B Geometrie/Algebra

geg.: Gerade h $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (u \in R)$; Geraden g_t: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} \quad (s \in R; t \in R, t \neq 0)$

a) - Extremwertproblem
- Aufstellung der Zielfunktion

Extremgröße: Abst. eines Pkts $P(x_P; y_P; z_P)$ vom Koordinatenursprung: $d = \sqrt{x_P^2 + y_P^2 + z_P^2}$

Nebenbedingung P sind die Durchstoßpunkte der Geraden g_t durch die x-y-Ebene

Ermittlung der Durchstoßpunkte der Geraden g_t durch die x-y-Ebene

Bedingung: $z = 0 = 4 + s_{xy}t \Leftrightarrow s_{xy} = \frac{4}{t}$

Berechnung der x- und y-Koordinate: $x_{xy} = 0{,}5 + \frac{8}{t}$; $y_{xy} = 4 + \frac{4}{t}$

Koordinaten der Durchstoßpkte: $D_t\left(\frac{1}{2} + \frac{8}{t}; 4 + \frac{4}{t}; 0\right)$

Einsetzen in die Ausgangsbeziehung:

Zielfunktion: $d = \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{8}{t}\right)^2 + \left(4 + \frac{4}{t}\right)^2 + 0^2} = d(t) \quad (t \in R, t \neq 0)$

- Berechnung der lokalen Extrema der Zielfunktion

GTR: $T(-4;3{,}35)$

Für t=-4 hat der Durchstoßpunkt der zugehörigen Geraden den minimalen Abstand von 3,35LE vom Koordinatenursprung.

- Angabe der Koordinaten dieses Punktes: $D_{t_{min}}(-1{,}5;3;0)$

b) - Ermittlung der Gleichung derjenigen Ebene, die alle Geraden g_t enthält

Aufstellung der Ebenengleichung

Stützvektor: $\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$; Richtungsvektor 1 für t=0: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; RV2 für t=1 $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

GTR: $E: \quad 2x - 4y = -15$

Die Ebene E ist eine zur x-y-Ebene senkrechte Ebene (bzw. zur z-Achse parallele Ebene).
D.h., die Grundfläche des gesuchten Prismas liegt in der x-y-Ebene (z=0), die Deckfläche liegt in einer zur x-y-Ebene parallelen Ebene (z=k) und die x-z-Ebene, y-z-Ebene und die Ebene E bilden die Seitenflächen.

Gesucht ist die Oberfläche desjenigen Prismas, für das das zugehörige Volumen 112,5VE beträgt

Oberfläche des Prismas: $A_{O\Pr} = 2A_G + U_G \cdot h$ (1)

Volumen des Prismas: $V_{\Pr} = A_G \cdot h = 112{,}5$ (2)

Die Grundfläche ist ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten

a ... Betrag der x-Koordinate des Durchstoßpunktes der y-z-Achse durch die Ebene E

$y = 0; z = 0: \quad 2x_N = -15 \Leftrightarrow x_N = -\frac{15}{2} \Rightarrow a = 7{,}5$

b ... Betrag der y-Koordinate des Durchstoßpunktes der x-z-Achse durch die Ebene E

$x = 0; z = 0: \quad -4y_N = -15 \Leftrightarrow y_N = \frac{15}{4} \Rightarrow b = 3{,}75 \Rightarrow a = 2b$

damit gilt:

$$A_G = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}2bb = b^2 = \left(\frac{15}{4}\right)^2 \quad (3)$$

$$U_G = a + b + c = 2b + b + \sqrt{(2b)^2 + b^2} = 3b + \sqrt{5}b = \left(3 + \sqrt{5}\right)b = \left(3 + \sqrt{5}\right)\frac{15}{4} \quad (4)$$

Umstellung von (2) nach h und Einsetzung in (2) ergibt: $A_{OPr} = 2A_G + U_G \cdot \frac{V_{Pr}}{A_{Gr}}$

Einsetzen von (2), (3), (4) in (1): $A_{OPr} \overset{GTR}{\approx} 185{,}2$

c) - Ermittlung der Parameter t_1, t_2 für die gilt: $\angle(g_t; E_{xy}) = 60°$

Als Winkel zwischen einer Gerade und einer Ebene bezeichnet man den Ergänzungswinkel zu 90° zwischen dem Richtungsvektor der Gerade und dem Normalenvektor der Ebene.

$\angle(g, E) = \alpha : |\vec{n} \cdot \vec{a}| = |\vec{n}||\vec{a}|\cos(90° - \alpha)$

Normalenvektor der x-y-Ebene: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad |\vec{n}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$

Richtungsvektor der Geraden: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}; \quad |\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + t^2} = \sqrt{5 + t^2}$

$$\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}\right| = 1 \cdot \sqrt{5 + t^2} \cdot \cos(90° - 60°)$$

$$|0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot t| = \sqrt{5 + t^2}\cos 30°$$

$$|t| = \sqrt{5 + t^2}\,\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{2|t|}{\sqrt{3}} = \sqrt{5 + t^2} \Leftrightarrow \frac{4t^2}{3} = 5 + t^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4t^2 = 15 + 3t^2 \Leftrightarrow t^2 = 15 \Leftrightarrow |t| = \sqrt{15} \Rightarrow t_1 = -\sqrt{15}; t_2 = \sqrt{15}$$

Angabe der Geradengleichungen:

$$g_{t_1}: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -\sqrt{15} \end{pmatrix}; \quad g_{t_2}: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \sqrt{15} \end{pmatrix}$$

d) - Berechnung desjenigen t_S für das sich die Geraden h und g_{t_S} schneiden

$$\begin{array}{rcll} 1{,}5 & = & 0{,}5 + 2s & \Rightarrow s = 0{,}5 \\ 0{,}5 + 4u & = & 4 + 2 & \overset{s=0{,}5}{\Rightarrow} u = 1 \\ 1 + u & = & 4 + t_S s & \Rightarrow 2 = 4 + 0{,}5t_S \Leftrightarrow t_S = -4 \end{array}$$

Nachweis, dass auf den Geraden h und g_{t_S} Diagonalen von Quadraten liegen können

Ansatz: Diagonalen in Quadraten stehen senkrecht aufeinander, d.h. das Skalarprodukt der Richtungsvektoren muss 0 ergeben

RV h: $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$; RV g_{t_S}: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$; Skalarprod.: $0 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot (-4) = 0 \Rightarrow$ Beh.

Bestimmung der Eckpunkte desjenigen Quadrates, das einen Flächeninhalt von 8,5FE hat

Ansatz: Alle Eckpunkte liegen auf einer Kugel um den Diagonalenschnittpunkt mit der Hälfte der Diagonalenlänge als Radius. Die Schnittpunkte dieser Kugel mit der Geraden h sind die gesuchten Eckpunkte.

- Aufstellung der Kugelgleichung

Mittelpunkt: $\vec{x}_M = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 4{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow M(1{,}5;4{,}5;2)$

Radius: $A_Q = a^2 \overset{a=\frac{d}{\sqrt{2}}}{=} \frac{d^2}{2} \overset{d=2r}{=} \frac{4r^2}{2} = 2r^2 = 8{,}5 \Leftrightarrow r^2 = 4{,}25$

Kugel: $(x-1{,}5)^2 + (y-4{,}5)^2 + (z-2)^2 = 4{,}25$

Berechnung der Schnittpunkte von Kugel und Gerade h

Parametrisierung der Kugelgleichung:

$$(1{,}5-1{,}5)^2 + (0{,}5+4u-4{,}5)^2 + (1+u-2)^2 = 4{,}25$$
$$(0)^2 + (4u-4)^2 + (u-1)^2 = 4{,}25$$
$$16u^2 - 32u + 16 + u^2 - 2u + 1 = 4{,}25$$
$$17u^2 - 34u + 12{,}75 = 0 \overset{GTR}{\Leftrightarrow} u_1 = 0{,}5; u_2 = 1{,}5$$

mit $u_1 = 0{,}5:\quad \vec{x}_{E_1} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} + 0{,}5\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 2{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} \Rightarrow E_1(1{,}5;2{,}5;1{,}5)$

mit $u_2 = 0{,}5:\quad \vec{x}_{E_2} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} + 1{,}5\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 2{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} \Rightarrow E_2(1{,}5;6{,}5;2{,}5)$

Teil C: Stochastik

a) - Anzahl der verschiedenen dreifarbigen Fan-Sets (3F-Set)

$N_{3F} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

Wahrscheinlichkeit für die Auswahl eines 3F-Sets

$P(3F) = \frac{N_{3F}}{N_{ges}} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{24}{4^3} = 0{,}3750$

b) - 100 Sets enthalten 37 3F-Sets

Ereignis B: bei 10maligem Ziehen (ohne Zurücklegen) wird kein 3F-Set entnommen

$P(B) = \frac{V_{10}^{100-37}}{V_{10}^{100}} \overset{GTR}{\approx} 0{,}0074$

c) - die Fanartikel sind mit folgenden Wahrscheinlichkeiten fehlerhaft

Wahrsch. dafür, dass eine Tasse fehlerhaft ist: $P_T(f) = 0{,}05$

Wahrsch. dafür, dass ein Feuerzeug fehlerhaft ist: $P_Z(f) = 0{,}08$

Wahrsch. dafür, dass ein Plüschherz fehlerhaft ist: $P_H(f) = 0{,}03$

Ereignis C1: ein Set enthält kein fehlerhaftes Teil

$P(C1) = P_T(\bar{f}) \cdot P_H(\bar{f}) \cdot P_Z(\bar{f}) = (1-0{,}05)(1-0{,}03)(1-0{,}08) \overset{GTR}{\approx} 0{,}8478$

ZEC1: Überprüfung eines Sets auf Fehler

BERNOULLI-Experiment mit den Ereignissen

f ... Set fehlerhaft: $P(f) = P(\overline{C1}) = 1 - 0{,}8478 = 0{,}1522$

$\bar{f}$ ... Set nicht fehlerhaft: $P(\bar{f}) = P(C1) = 0{,}8478$

ZEC1200: Überprüfung von 1200 Sets (eine Tagesproduktion) auf Fehler

ZG X bezeichne die Anzahl von fehlerhaften Sets einer Tagesproduktion. Dann ist X binomialverteilt mit den Parametern Kettenlänge $n = 1200$ und Erfolgswahrscheinlicheit $p = P(f) = 0{,}1522$

Ereignis C2: **mindestens 158** und **höchstens 207** fehlerhafte Sets in einer TP

$P(C2) = P(158 \le X \le 207) \overset{GTR}{\approx} 0{,}9510$

ZECn: Überprüfung von n Sets
Ereignis C3: **mindestens 1** Set fehlerhaft
Ereignis $\overline{C3}$: **höchstens 0** Sets fehlerhaft

$P(C3) = 1 - P(\overline{C3}) = 1 - \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} = 1 - (1-p)^n \ge 0{,}95 \overset{p=0{,}1522}{\Leftrightarrow} 0{,}05 \ge 0{,}8478^n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln 0{,}05 \ge n \ln 0{,}8478 \Leftrightarrow \frac{\ln 0{,}05}{\ln 0{,}8478} \le n \Leftrightarrow n \ge 18{,}1$

Es müssen mindestens 19 Sets entnommen werden.

d) - Widerlegung der Behauptung des Verkäufers
ZED5: Überprüfung von 5 Feuerzeugen
ZG D1 bezeichne die Anzahl von fehlerhaften Feuerzeugen unter den ausgewählten. Dann ist D1 binomialverteilt mit den Parametern Kettenlänge $n = 5$ und Erfolgswahrscheinlicheit $p = P_Z(f) = 0{,}08$
Ereignis A: **genau 1** fehlerhaftes Feuerzeug in der Auswahl

$P(A) = P(D1 = 1) \overset{GTR}{\approx} 0{,}2866$

ZED4: Überprüfung von 4 Feuerzeugen
ZG D2 bezeichne die Anzahl von fehlerhaften Feuerzeugen unter den ausgewählten. Dann ist D2 binomialverteilt mit den Parametern Kettenlänge $n = 4$ und Erfolgswahrscheinlicheit $p = P_Z(f) = 0{,}08$
Ereignis B: **mindestens 1** und **höchstens 2** fehlerhafte Feuerzeuge in der Auswahl

$P(B) = P(1 \le D1 \le 2) \overset{GTR}{\approx} 0{,}2817$

Es gilt: $P(A) \ne P(B) \Rightarrow$ Aussage des Verkäufers ist falsch.
Untersuchung, ob es Wahrscheinlichkeiten gibt, für die die Aussage des Verkäufers wahr ist

$P(A) = \binom{5}{1} p^1 (1-p)^4 = 5p(1-p)^4; \quad P(B) = \binom{4}{1} p^1 (1-p)^3 + \binom{4}{2} p^2 (1-p)^2 = 4p(1-p)^3 + 6p^2(1-p)^2$

$P(A) = P(B) \Leftrightarrow 0 = P(A) - P(B)$

$0 = 5p(1-p)^4 - 4p(1-p)^3 - 6p^2(1-p)^2 = p(1-p)^2\left(5(1-p)^2 - 4(1-p) - 6p\right) =$

$= p(1-p)^2\left(5(1-2p+p^2) - 4 + 4p - 6p\right) = p(1-p)^2\left(5 - 10p + 5p^2 - 4 - 2p\right) =$

$$0 = p(1-p)^2\left(1 - 12p + 5p^2\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 1.\ 0 = p \\ 2.\ 0 = (1-p)^2 \Leftrightarrow 0 = 1 - p \Leftrightarrow p = 1 \\ 3.\ 0 = 1 - 12p + 5p^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3.1.\ p = 0{,}0864 \\ 3.2.\ p = 2{,}3135 \text{ entfällt wegen } 0 \le p \le 1 \end{cases} \end{cases}$$

Die Aussage des Verkäufers ist genau dann wahr, wenn
1. keine defekten Feuerzeuge existieren (Fehlerwahrscheinlichkeit 0)
2. alle Feuerzeuge defekt sind (Fehlerwahrscheinlichkeit 1)
3. die Fehlerwahrscheinlichkeit 0,0864 beträgt

Teil D1: Wahlaufgabe Analysis

geg.: Fkt 3. Grades verläuft durch den Pkt. $P(0;-3)$, besitzt bei $Q(2;1)$ lok. Extremum
analytische Formulierung der Bedingungen
allgemeine Funktionsgleichung: $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

1. $P \in f$: $f(0) = -3 = a_3 \cdot 0^3 + a_2 \cdot 0^2 + a_1 \cdot 0 + a_0 = a_0 \Leftrightarrow a_0 = -3$
2.
$Q \in f$: $f(2) = 1 = a_3 \cdot 2^3 + a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2 + a_0 = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 - 3 = 1 \Leftrightarrow 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 = 4$
3. lok. Extremum bei Q: $f'(2) = 0 = 3a_3 \cdot 2^2 + 2a_2 \cdot 2 + a_1 = 12a_3 + 4a_2 + a_1 = 0$

a) - rechnerischer Nachweis, dass $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 3x - 3 \quad (x \in R)$ die Bed. erfüllt

f ist Funktion 3. Grades

1. $f(0) = -\frac{1}{4} \cdot 0^3 + 3 \cdot 0 - 3 = -3$ Bed. 1 erfüllt

2. $f(2) = -\frac{1}{4} \cdot 2^3 + 3 \cdot 2 - 3 = -2 + 6 - 3 = 1$ Bed. 2 erfüllt

3.1. $f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3: \quad f'(2) = -\frac{3}{4} \cdot 2^2 + 3 = 0$ notwendige Bed. für Ex. lok. Extrema erfüllt

3.2. $f''(x) = -\frac{6}{4}x: \quad f''(2) = -\frac{6}{4} \cdot 2 \neq 0$ hinreichende Bed. für Ex. lok. Extrema erfüllt

aus 1. – 3.2. folgt die Behauptung

Ermittlung derjenigen Funktion g für die zusätzlich gilt: 4. $g'(-1) = 0$

4. $g'(-1) = 0 = 3a_3 \cdot (-1)^2 + 2a_2 \cdot (-1) + a_1 = 3a_3 - 2a_2 + a_1 = 0$

Aufstellung eines linearen GS aus den Bedingungen 1., 2., 3. und 4. ergibt

$$\begin{array}{rrrrcr} & & & a_0 & = & -3 \\ 8a_3 & +4a_2 & +2a_1 & +a_0 & = & 1 \\ 12a_3 & +4a_2 & +a_1 & & = & 0 \\ 3a_3 & -2a_2 & +a_1 & & = & 0 \end{array}$$

Lösungsvektor: $(a_3; a_2; a_1; a_0)^T = (-0{,}4; 0{,}6; 2{,}4; -3)^T$

Funktionsgleichung von g: $g(x) = -0{,}4x^3 + 0{,}6x^2 + 2{,}4x - 3$

b) - Ermittlung einer allg. Funktionsgl. für Funktionen mit den Eigenschaften 1. – 3.

aus Bedingung 1. ergibt sich $a_0 = -3$

Berechnung der Werte für die übrigen Parameter aus den Bedingungen 2. und 3.

$$\begin{array}{rrrcr|l} 8a_3 & +4a_2 & +2a_1 & = & 4 & -1 \\ 12a_3 & +4a_2 & +a_1 & = & 0 & 1 \\ \hline 8a_3 & +4a_2 & +2a_1 & = & 4 & 1 \\ 4a_3 & & -a_1 & = & -4 & 2 \quad \overset{a_3=t}{\Leftrightarrow} a_1 = 4t + 4 = 4(t+1) \\ \hline 16a_3 & +4a_2 & & = & -4 & \quad \overset{a_3=t}{\Leftrightarrow} a_2 = -4t - 1 = -(4t+1) \end{array}$$

Daraus ergibt sich die Gl.: $\boxed{f_t(x) = tx^3 - (4t+1)x^2 + 4(t+1)x - 3 \quad (x \in R; t \in R, t \neq 0)}$

Ermittlung derjenigen Funktion für die $f_{t_g}(x_W) = \frac{3}{2}$

Berechnung der x-Koordinate des Wendepunktes

$f_t'(x) = 3tx^2 - 2(4t+1)x + 4(t+1)$

$f_t''(x) = 6tx - 2(4t+1) \quad x = x_W \Leftrightarrow f_t''(x_W) = 0 = 6tx_W - 2(4t+1) \Leftrightarrow x_W = \frac{4t+1}{3t}$

Funktionsgleichung der Wendepunkte in Abhängigkeit von t

$$f_t(x_W) = t\left(\frac{4t+1}{3t}\right)^3 - (4t+1)\left(\frac{4t+1}{3t}\right)^2 + 4(t+1)\frac{4t+1}{3t} - 3 = h(t)$$

Berechnung desjenigen t_g, für das $h(t_g) = \frac{3}{2}$

GTR: $t_g = 2$

Aufstellung der speziellen Unktionsgleichung

$f_2(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$

Teil D2: Wahlaufgabe Geometrie/Algebra

geg. Pkte $A(-5;11;0{,}6)$, $B(-5;-3;0{,}4)$, $S(2;4;0)$; 1LE entspricht 10m; z-Koord. gibt Höhe an

a) - Berechnung Winkel $ASB = \alpha$

$$\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB}=\left|\overrightarrow{SA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{SB}\right|\cos\alpha \Leftrightarrow \alpha = \arccos\frac{\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB}}{\left|\overrightarrow{SA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{SB}\right|}=\arccos\frac{\begin{pmatrix}-7\\7\\0,6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-7\\-7\\0,4\end{pmatrix}}{\sqrt{98,36}\cdot\sqrt{98,16}}\approx 89,9°$$

b) - Berechnung der Anhebung des Punktes S

Aufstellung der Gl. der Ebene durch A und B, parallel zur x-Achse

Stützvektor: $\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}-5\\11\\0,6\end{pmatrix}$; 1. Richtungsvektor: $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}0\\-14\\-0,2\end{pmatrix}$; 2. RV: $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

Ebenengleichung in parameterfreier Form: GTR $\boxed{E:\quad -0,2y+14z=6,2}$

Aufstellung der Gl. der Gerade durch S, parallel zur z-Achse

Stützvektor: $\overrightarrow{OS}=\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}$; Richtungsvektor: $\vec{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Geradengleichung: $h:\quad \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Berechnung des Durchstoßpunktes von h durch E: GTR $H(2;4;0,5)$

Die Differenz der z-Koordinaten von S und H gibt die notwendige Anhebung an:
$a=0,5-0=0,5\Rightarrow 5m$

c) - Ermittlung der Länge des Kreisbogens

Gerade g (Gerade durch H und A) $g:\quad \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\4\\0,5\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}-7\\7\\0,1\end{pmatrix}$

Gerade f (Gerade durch H und B) $f:\quad \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\4\\0,5\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}-7\\-7\\-0,1\end{pmatrix}$

Es bezeichnen B_g, B_f die Berührungspunkte des Kreises an den Geraden g und f. Der Punkt M sei der Mittelpunkt des Kreises, der die Kurve beschreibt. Der Winkel B_gMB_f erhält die Bezeichnung β. Der Winkel B_gHB_f erhält die Bezeichnung γ.
analog Aufgabenteil a kann der Winkel γ berechnet werden

$$\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB}=\left|\overrightarrow{HA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{HB}\right|\cos\gamma \Leftrightarrow \gamma = \arccos\frac{\begin{pmatrix}-7\\7\\0,1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-7\\-7\\-0,1\end{pmatrix}}{\sqrt{98,01}\cdot\sqrt{98,01}}=\arccos\frac{-0,01}{98,01}$$

Das Dreieck SMB_g ist dann ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkeln beim Eckpunkt B_g (Berührungspkt Kreis Tangente). Darum gilt:

$$\frac{\beta}{2}=180°-90°-\frac{\gamma}{2}\Leftrightarrow\frac{\beta}{2}=90°-\frac{\gamma}{2}$$

Die Strecke $\overline{MB_g}$ ist der Radius des Kurvenkreises. Die Strecke $\overline{MB_g}$ ist Gegenkathete und die Strecke $\overline{SB_g}=66m$ ist Ankathete zum Winkel $\frac{\gamma}{2}$ im rechtwinkligen Dreieck SMB_g. Damit gilt: $\tan\frac{\gamma}{2}=\frac{\overline{MB_g}}{\overline{SB_g}}=\frac{r}{66}\Leftrightarrow r=66\cdot\tan\frac{\gamma}{2}$

$$\frac{2\pi r}{360^\circ} = \frac{b}{\beta} \Leftrightarrow b = \frac{\beta}{180^\circ}\pi r = \frac{2\left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right)}{180^\circ}\pi \cdot 66 \cdot \tan\frac{\gamma}{2} \approx 103{,}7$$

Berechnung der Koordinaten des Kurvenkreismittelpunktes

Da der Kreis die Geraden g und f, die beide durch den Punkt H verlaufen, berührt, muss der Mittelpunkt von k auf der Winkelhalbierenden des Winkels AHB. Diese Winkelhalbierende w verläuft durch den Punkt H und M_{AB} den Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$.

$$M_{AB}\left(\frac{-5-5}{2};\frac{11-3}{2};\frac{0{,}6+0{,}4}{2}\right) = (-5;4;0{,}5)$$

Richtungsvektor der Winkelhalbierenden: $\overrightarrow{HM}_{AB} = \begin{pmatrix} -5-2 \\ 4-4 \\ 0{,}5-0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow RV \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Für den Ortsvektor des Kreismittelpunktes gilt dann: $\overrightarrow{OM}_k = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}_k = \overrightarrow{OH} + l_k\vec{a}$

Außerdem ist $\overrightarrow{HM}_k$ Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck HM_kB_g:

$$\left|\overrightarrow{HM}_k\right| = \sqrt{\left|\overrightarrow{HB_g}\right|^2 + \left|\overrightarrow{B_gM_k}\right|^2} = \sqrt{6{,}6^2 + 6{,}6^2\cdot\left(\tan\frac{\gamma}{2}\right)^2} = 6{,}6\sqrt{1+\tan^2\frac{\gamma}{2}} = l_k\left|\vec{a}\right| \overset{|\vec{a}|=1}{=} l_k \approx 9{,}3$$

$$\overrightarrow{HM}_k = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} + l_k\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-9{,}3 \\ 4-0 \\ 0{,}5-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7{,}3 \\ 4 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} \Rightarrow M_k(-7{,}3;4;0{,}5)$$