Sächsisches Staatsministerium
für Kultus

Schuljahr **2003/04**

Geltungsbereich:
- Allgemein bildendes Gymnasium
- Abendgymnasium und Kolleg
- Schulfremde Prüfungsteilnehmer

Schriftliche Abiturprüfung
Grundkursfach Mathematik

- E R S T T E R M I N -

Material für den Prüfungsteilnehmer

Allgemeine Arbeitshinweise

Ihre Arbeitszeit (einschließlich der Zeit für das Lesen der Aufgabentexte und der Zeit für die Auswahl der Wahlaufgabe) beträgt **240 Minuten.**

Auf dem Deckblatt der Arbeit haben Sie den verwendeten GTR-Typ anzugeben.

Die Prüfungsarbeit besteht aus den zu bearbeitenden **Pflichtteilen A**, **B** und **C** sowie dem **Wahlteil D**.
Es sind alle Aufgaben der Pflichtteile zu bearbeiten.
Aus dem Teil D ist **genau eine** der beiden Aufgaben zu bearbeiten.

Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionen) Hilfslinien muss deutlich erkennbar in gut lesbarer Form dargestellt werden.

Insgesamt sind 60 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar, davon

im Teil A	25 BE,
im Teil B	15 BE,
im Teil C	10 BE,
im Teil D	10 BE.

Erlaubte Hilfsmittel:
- Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung
- 1 Taschenrechner ohne Computer-Algebra-System
- 1 Tabellen- und Formelsammlung (im Unterricht eingeführt, ohne ausführliche Musterbeispiele)
- Zeichengeräte

Prüfungsinhalt

Pflichtaufgaben

Teil A: Analysis

Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - \frac{9}{4}} \quad (x \in D_f)$.

a) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion f, ihre Nullstellen und die Polstellen an.

Untersuchen Sie den Graphen der Funktion f auf Symmetrie.

Begründen Sie mithilfe der ersten Ableitung der Funktion f, dass der Graph der Funktion f höchstens einen lokalen Extrempunkt besitzt.

Geben Sie die Koordinaten des Extrempunktes und dessen Art an.

Erreichbare BE-Anzahl: 10

b) Untersuchen Sie den Graphen der Funktion f auf zur x-Achse parallele Asymptoten.

Geben Sie den Wertebereich der Funktion f an.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

c) Die beiden Tangenten an den Graphen der Funktion f in den Punkten $S_1(0;f(0))$ und $S_2(3;f(3))$ sowie die y-Achse begrenzen eine Dreiecksfläche vollständig. Weisen Sie nach, dass das Dreieck nicht gleichschenklig ist.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

d) Der Graph der Funktion f, die Gerade mit der Gleichung y = 5 und die y-Achse begrenzen im ersten Quadranten eine Fläche vollständig.

Ermitteln Sie einen Näherungswert für den Inhalt dieser Fläche.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

e) Die Funktion f wird im Intervall $0 \le x < \frac{3}{2}$ $(x \in R)$ durch eine quadratische Funktion p_a der Form $y = p_a(x) = ax^2 + 4 \quad (x \in D_{p_a}; a \in R, a > 0)$ ersetzt .

Weisen Sie nach, dass $R_a\left(\frac{1}{\sqrt{a}};5\right)$ ein Schnittpunkt des Graphen der Funktion p_a mit der Geraden y = 5 ist.

Betrachtet wird nun die Fläche, die vom Graphen der Funktion p_a, der Geraden y = 5 und der y-Achse im ersten Quadranten vollständig begrenzt wird.

Ermitteln Sie den Wert a, für den der Inhalt dieser Fläche 0,5 beträgt.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

Teil B: Geometrie/Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(2;12;-2)$, $B(4;6;1)$, $C(10;3;3)$ und $M\left(6;\frac{15}{2};\frac{1}{2}\right)$ gegeben.

a) Weisen Sie nach, dass das Dreieck ABC gleichschenklig und stumpfwinklig ist.

Stellen Sie das Dreieck ABC in einem kartesischen Koordinatensystem dar.

Begründen Sie, dass es mehr als einen Punkt P gibt, so dass die Punkte A, B, C und P (nicht notwendigerweise in dieser Reihenfolge) Eckpunkte eines Parallelogramms sind.

Erreichbare BE-Anzahl: 6

b) Es gibt genau einen Punkt P, so dass das Viereck ABCP ein Rhombus ist.

Ermitteln Sie die Koordinaten dieses Punktes P.

Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Rhombus.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

c) Zeigen Sie, dass die Punkte A, B, C und M in ein und derselben Ebene liegen.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

d) Für jedes a $(a \in R)$ ist eine Gerade g_a durch $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2a \\ 13 \\ -3 \end{pmatrix}$ $(t \in R)$ gegeben.

Geben Sie den Wert a an, für den der Punkt M auf der Geraden g_a liegt.

Es gibt genau eine Gerade g_a, die senkrecht zur Geraden g_5 verläuft.

Berechnen Sie den Wert a.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

Teil C: Stochastik

Bei einer „Siebener-Wette“ tippt man den Ausgang von sieben aufeinanderfolgenden Zufallsexperimenten. Jedes dieser Zufallsexperimente hat genau die drei verschiedenen Ergebnisse 0, 1 und 2, die alle gleichwahrscheinlich sind. Beim Tippen wird auf einem Schein (siehe nebenstehendes Beispiel) für jedes Zufallsexperiment genau eine der Zahlen angekreuzt.

1. Zufallsexperiment	~~1~~	0	2
2. Zufallsexperiment	1	~~0~~	2
3. Zufallsexperiment	1	~~0~~	2
4. Zufallsexperiment	1	0	~~2~~
5. Zufallsexperiment	1	~~0~~	2
6. Zufallsexperiment	~~1~~	0	2
7. Zufallsexperiment	1	0	~~2~~

a) Geben Sie die Anzahl aller Möglichkeiten zum Ausfüllen des Tippscheines an.

Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass auf einem Schein alle Ergebnisse richtig getippt wurden.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
Ereignis A: Genau zwei Ergebnisse sind richtig angekreuzt.
Ereignis B: Höchstens vier Ergebnisse sind falsch angekreuzt.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

c) Für die „Siebener-Wette“ wird folgender Auszahlungsplan vorgeschlagen:
Der Einsatz pro Tippschein beträgt 1 €.
Für weniger als 5 Richtige erfolgt keine Auszahlung.
Für 5 Richtige werden 2 € ausgezahlt.
Für 6 Richtige werden 10 € ausgezahlt.
Für 7 Richtige werden 1000 € ausgezahlt.

Berechnen Sie, welchen Gewinn der Veranstalter der „Siebener-Wette“ bei 1000 gespielten Tippscheinen erwarten kann.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

d) Ein anderer Veranstalter bietet eine „Dreier-Wette“ an.
Diese erfolgt in gleicher Art wie die „Siebener-Wette“, beinhaltet jedoch nur drei Zufallsexperimente.

Entwickeln Sie einen Auszahlungsplan der „Dreier-Wette“, so dass diese bei einem Einsatz von 1 € als fair betrachtet werden kann.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

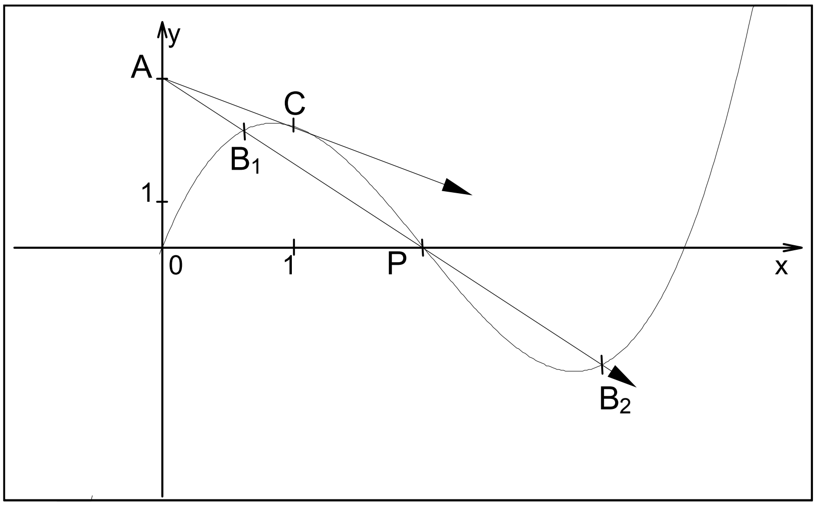
Teil D: Wahlaufgaben

Wählen Sie genau eine der folgenden Aufgaben zur Bearbeitung aus.

Aufgabe D 1: Analysis

Eine Stadtverwaltung plant die Gestaltung einer Parkanlage, wobei zwei vorhandene Straßen und ein Flusslauf einbezogen werden sollen.

In einem kartesischen Koordinatensystem verläuft die Straße 1 im betrachteten Abschnitt auf der Geraden mit der Gleichung $y = 0$, die Straße 2 auf der Geraden mit der Gleichung $x = 0$.



Die Straßen- und Flussbreite wird in der Planungsskizze vernachlässigt.
Eine Längeneinheit beträgt 100 Meter.

Der Flusslauf kann im Bereich $0 \leq x \leq 4$ $(x \in \mathbb{R})$ näherungsweise durch den Graphen der Funktion f mit der Gleichung $y = f(x)= x^3 - 6x^2 + 8x$ beschrieben werden.

a) Die Straße 1 und der Flusslauf schließen genau zwei Teilflächen ein.

Zeigen Sie, dass beide Teilflächen den gleichen Flächeninhalt haben und geben Sie diesen Flächeninhalt in Hektar an.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

b) Im Punkt $A(0; 4)$ der Straße 2 befindet sich eine Bushaltestelle. Von dieser Haltestelle aus sollen zwei geradlinig verlaufende Wege (Rad- und Fußweg) angelegt werden.
Der Radweg kreuzt den Flusslauf in den Punkten B_1, $P(2; 0)$ und B_2.
Ermitteln Sie die Länge des Radweges zwischen den Punkten B_1 und B_2 in Metern.
Der Fußweg tangiert den Flusslauf im Bereich $0 < x < 2$. Am Berührungspunkt C ist eine Bootsanlegestelle geplant.

Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes C.

Erreichbare BE-Anzahl: 6

Aufgabe D 2: Geometrie/Algebra

Parasailing ist eine Freizeitaktivität, bei der Personen von einem Motorboot aus mithilfe eines Fallschirms durch den Fahrtwind in die Luft bewegt werden.
Bei einer solchen Aktivität passiert ein Boot mit einer konstanten Geschwindigkeit von 60 Kilometern pro Stunde einen Punkt A und fährt mit dieser Geschwindigkeit geradlinig in Richtung eines Punktes B.
Der Sportler am Fallschirm ist durch ein 200 Meter langes, geradlinig verlaufendes Seil mit dem Boot verbunden.

Die Punkte A und B haben in einem kartesischen Koordinatensystem die Koordinaten $A(0;0;0)$ und $B(6{,}6;8{,}8;0)$. Eine Längeneinheit entspricht einem Kilometer, die z-Koordinate beschreibt die Höhe über der Wasseroberfläche.

a) Berechnen Sie, wie viele Minuten das Boot vom Punkt A bis zum Punkt B benötigen würde .

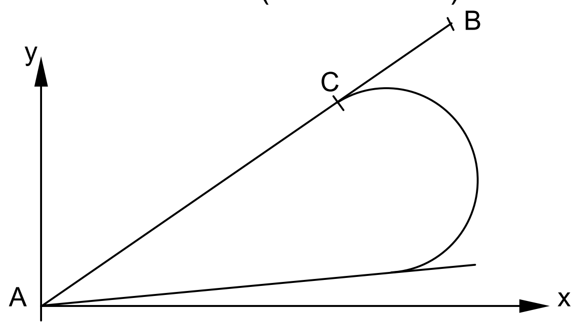
Erreichbare BE-Anzahl: 2

b) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes, in dem sich das Boot zwei Minuten nach Passieren des Punktes A befindet.

Berechnen Sie die Höhe des Sportlers über der Wasseroberfläche, wenn das Seil mit der Wasseroberfläche einen Winkel von $30°$ bildet. (Die Bootshöhe kann vernachlässigt werden.)

Erreichbare BE-Anzahl: 4

c) Im Punkt $C(2{,}4;3{,}2;0)$ schwenkt das Boot (bei gleich bleibender Geschwindigkeit) von der Fahrtlinie AB ab und begibt sich auf eine Kreisbahn mit einem Radius von 500 Metern, wobei die Gerade durch die Punkte A und B eine Tangente an dem Kreis ist, auf dem sich die Kreisbahn befindet. Von dieser Kreisbahn aus fährt das Boot auf einer wiederum den Kreis tangierenden geraden Fahrtlinie direkt zum Punkt A zurück (siehe Skizze).



Skizze
(nicht maßstäblich)

Berechnen Sie die Länge des Weges, den das Boot vom Punkt C bis zum Punkt A zurücklegt.

Erreichbare BE-Anzahl: 4