Teil A – Analysis

$$y = f_t(x) = \frac{1}{t} \cdot (x - 2t) \cdot \sqrt{x} = \frac{1}{t} x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} \qquad \left(x \in D_{f_t}; t \in \mathbb{R} \wedge t > 0\right)$$

a) Definitionsbereich: $D_{f_t}: \quad x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0$ (1) größtm. D_f

Nullstellen: $x_{01} = 2t$ (2) erste Nullstelle

$x_{02} = 0$ (3) zweite Nullstelle

Nachweis 2. Ableitung: (4) Ansatz für 1. Abl.

$$f_t'(x) = \frac{3}{2t} x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}$$

(5) erste Ableitung

$$f_t''(x) = \frac{3}{4t} x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} = \frac{3}{4t\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x^3}} = \frac{3}{4t\sqrt{x}} + \frac{1}{2x\sqrt{x}} = \frac{3x + 2t}{4tx\sqrt{x}} = \frac{1}{t}\left(\frac{3x + 2t}{4x\sqrt{x}}\right)$$

(6) Ansatz für 2. Abl.

Nachweis Extrempunkt $P_t\left(\frac{2}{3}t; -\frac{4}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}t}\right)$ (7) 2. Ableitung

$$f_t'(x) = \frac{3}{2t} x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f_t'\left(\frac{2}{3}t\right) = \frac{3}{2t}\left(\frac{2}{3}t\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{2t}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{9 \cdot 2}{4t^2 \cdot 3}t\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{3}{2t}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{3}{2t}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{3}{2t}\right)^{\frac{1}{2}} = 0 \quad q.e.d.$$

(8) Nachweis der Extremstelle

$$f_t\left(\frac{2}{3}t\right) = \frac{1}{t} \cdot \left(\frac{2}{3}t - 2t\right) \cdot \sqrt{\frac{2}{3}t} = \frac{1}{t}\left(-\frac{4}{3}t\right) \cdot \sqrt{\frac{2}{3}t} = -\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}t} \quad q.e.d.$$

(9) Nachweis der Ordinate des Extrempunktes

Art des Extremums:

$$f_t''(x) = \frac{1}{t}\left(\frac{3x + 2t}{4x\sqrt{x}}\right) \Rightarrow f_t''\left(\frac{2}{3}t\right) = \frac{1}{t}\left(\frac{3 \cdot \frac{2}{3}t + 2t}{4 \cdot \frac{2}{3}t\sqrt{\frac{2}{3}t}}\right)$$

$$= \frac{3}{2t\sqrt{\frac{2}{3}t}} > 0, da \quad t > 0 \Rightarrow Min$$

(10) Untersuchung und Art des Extremas

Natürlich könnte man auch argumentieren, dass x und t ohnehin größer 0 sind und demzufolge die zweite Ableitung an jeder Stelle größer 0 sein muss.

Nachweis, dass keine Wendestelle existiert: (11) Begründung für Wendepunkt

Angenommen, eine Wendestelle existieren, dann

$$0 = \frac{1}{t}\left(\frac{3x_W + 2t}{4x_W\sqrt{x}}\right) \Leftrightarrow 0 = 3x_W + 2t \Leftrightarrow x_W = -\frac{2}{3}t < 0 \quad Widerspruch\, zu\, D_{f_t}$$

(12) Begründung für Wendepunkt

Also ist die Annahme falsch, also existiert keine Wendestelle.

b) Ortskurve der Extrempunkte: (13) Ansatz f für Gleichung

$$x = \frac{2}{3}t \Rightarrow t = \frac{3}{2}x$$

(14) Ansatz f für Gleichung

$$y = -\frac{4}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}x} = -\frac{4}{3} \cdot \sqrt{x} \qquad x \in D_{f_t}$$

(15) Gleichung

Abstand vom Ursprung:

$$d(O;Q)=\sqrt{x_Q^2+y_Q^2}=\sqrt{\left(\frac{2}{3}t\right)^2+\left(-\frac{4}{3}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}t}\right)^2}=\sqrt{\frac{4}{9}t^2+\frac{32}{27}t}$$ (16) Ansatz für Abstand

$$\frac{1}{12}\sqrt{73}=\sqrt{\frac{4}{9}t^2+\frac{32}{27}t}\Rightarrow\frac{73}{144}=\frac{4}{9}t^2+\frac{32}{27}\Rightarrow\frac{4}{9}t^2+\frac{32}{27}-\frac{73}{144}=0$$

$$t=0{,}375=\frac{3}{8}$$ (17) Wert t

---

c)

$$V_t=\pi\cdot\int_0^{2t}\left(\frac{1}{t}x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}\right)^2dx=\pi\int_0^{2t}\left(\frac{1}{t^2}x^3-\frac{4}{t}x^2+4x\right)dx=\pi\left[\frac{1}{4t^2}x^4-\frac{4}{3t}x^3+2x^2\right]_0^{2t}$$ (18) Ansatz für Volumen für t

$$=\pi\left[\left(4t^2-\frac{32}{3}t^2+8t^2\right)-0\right]=\pi\cdot\frac{4}{3}t^2$$ (19) Stammfunktion

Für $t=2$ gilt: (20) Ansatz für t=2

$$V_2=\pi\cdot\frac{4}{3}\cdot2^2=\frac{16}{3}\pi\approx16{,}755$$ (21) Volumen für t=2

Ermitteln des Wertes t für $V_t=108\pi$

$$\pi\cdot\frac{4}{3}t^2=108\pi$$ (22) Ansatz für Wert t

$$t^2=81$$

$$t=9$$ (23) Wert t

---

d) Tangentengleichung: $y=mx+n$ $R_t(2t;0)$

$$m=f_t'(2t)=\frac{3}{2t}\sqrt{2t}-\frac{1}{\sqrt{2t}}=\frac{\sqrt{2t}}{t}$$ (24) Anstieg der Tangente

$$0=\frac{\sqrt{2t}}{t}\cdot2t+n\Rightarrow n=-2\sqrt{2t}$$ (25) Ansatz für Tangenten-gleichung

$$y=\frac{\sqrt{2t}}{t}x-2\sqrt{2t}$$

Ordinatenschnittpunkt der Tangente: (26) Ordinate des Schnittpunktes der Tangente mit Ordinanenachse

$$y_S=\frac{\sqrt{2t}}{t}\cdot0-2\sqrt{2t}=-2\sqrt{2t}$$

$$A_D=\frac{1}{2}|y_S|\cdot x_R=\frac{1}{2}2\sqrt{2t}\cdot2t=2t\cdot\sqrt{2t}$$ (27) Ansatz für Wert t für A=1

$$1=2t\cdot\sqrt{2t}\Rightarrow1=8t^3\Rightarrow t^3=\frac{1}{8}$$

$$t=\frac{1}{2}$$ (28) Wert t

Dreieck nur gleichschenklig, wenn $|y_S|=x_R$ (29) Ansatz für Wert t für Gleich-schenkligkeit

$$2\sqrt{2t}=2t\Rightarrow\sqrt{2t}=t\Rightarrow2t=t^2\Rightarrow t=2$$ (30) Wert t

e)

$f_2(x) = \frac{1}{2} \cdot (x-4) \cdot \sqrt{x} = \frac{1}{2} x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}}$ $\quad x_{01} = 0 \quad x_{02} = 4$

$$A = \left| \int_0^4 \left(\frac{1}{2} x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} \right) dx \right| = \left| \left[\frac{1}{5} x^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 \right| = \left| \frac{32}{5} - \frac{32}{3} \right| = \frac{64}{15}$$ (31) Ansatz

Fallunterscheidung:
entweder es ist der erste Flächeninhalt doppelt so groß, wie der zweite, oder umgekehrt. Der Schüler braucht nur eine der beiden Varianten durchrechnen. (32) Umformung - 1

1. Fall: $A_1 = 2 \cdot A_2 \quad (A_1 + A_2 = A)$

Also: $A_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{64}{15} = \frac{128}{45} \quad A_2 = \frac{64}{45}$ (33) Umformung – 2

$$\frac{128}{45} = \left| \int_0^b \left(\frac{1}{2} x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} \right) dx \right| = \left| \left[\frac{1}{5} x^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^b \right| = \frac{4}{3} b^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5} b^{\frac{5}{2}} = \frac{4}{3} b\sqrt{b} - \frac{1}{5} b^2 \sqrt{b}$$ (34) Umformung – 3

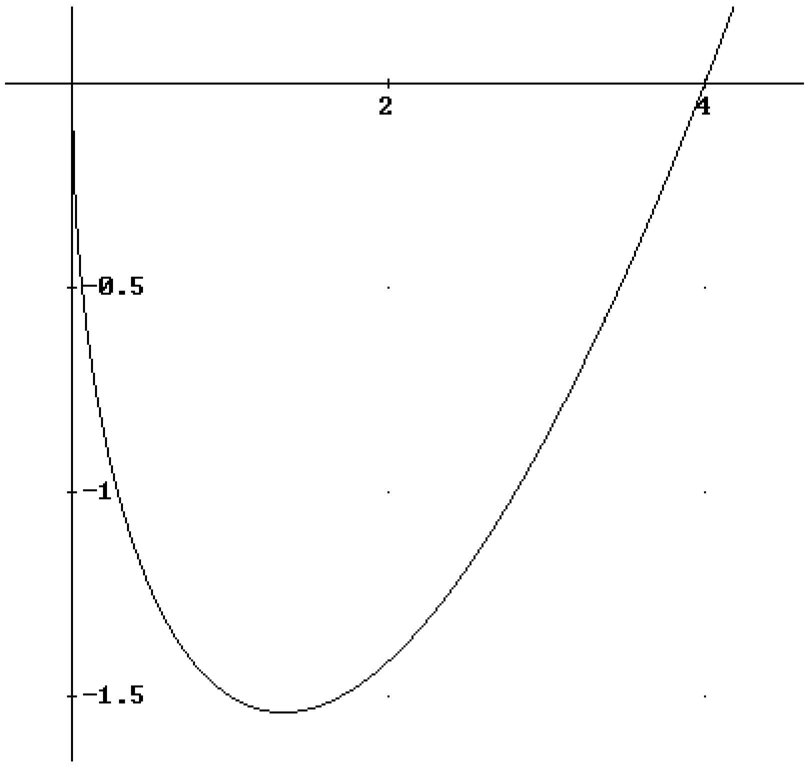
Fasst man den Term $\frac{4}{3} b\sqrt{b} - \frac{1}{5} b^2 \sqrt{b}$ als Funktion auf, kann man den Grafiksolver (x-solv) des GTR nutzen.

$b \approx 2{,}1475$

Analog verfährt man im 2. Fall: $2A_1 = A_2 \quad (A_1 + A_2 = A)$

$b \approx 1{,}1902$ (35) Wert b

Skizze



Teil B – Geometrie/Algebra

$$g:\quad \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}\qquad h_a:\quad \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\a\\4\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\a\\-6\end{pmatrix}$$

$$E_k:\quad (6k-3)\cdot x+2\cdot y+(2k-1)\cdot z=6$$

---

a) Eine (beliebige) Gerade, die g senkrecht schneidet:

Nutze den Aufpunkt von g und einen zu $\vec{r}_g$ senkrecht stehenden Vektor:

Also z.B.

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}\perp\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$$

(1) Stützvektor der schneidenden Geraden

(2) Richtungsvektor der schneidenden Geraden

Für welches k liegt g in E_k?

Setze g in E_k ein:

$$(6k-3)\cdot(2+s)+2\cdot 3+(2k-1)\cdot(-1-3s)=6$$

(3) Ansatz für Wert k

$$12k+6ks-6-3s+6-2k-6ks+1+3s=6$$
$$10k+1=6$$
$$10k=5$$
$$k=\frac{1}{2}$$

(4) Wert k

Nachweis, dass $E_k \parallel g \Leftrightarrow \vec{n}_{E_k}\perp g \Leftrightarrow \vec{n}_{E_k}\bullet g=0$

(5) Ansatz für Nachweis der Parallelität

$$\begin{pmatrix}6k-3\\2\\2k-1\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}=(6k-3)\cdot 1+0+(2k-1)\cdot(-3)=6k-3-6k+3=0\ \text{q.e.d.}$$

(6) Nachweis der Parallelität r

---

b) Untersuchung, ob $g \parallel h_a$:

$$r\cdot\vec{r}_g=\vec{r}_{h_a}\Rightarrow r\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\a\\-6\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{matrix}r&=&2\\0&=&a\\-3r&=&-6\end{matrix}\Rightarrow\begin{matrix}\textit{für } a=0 & g\parallel h_a\\ \textit{für } a\neq 0 & g\nparallel h_a\end{matrix}$$

(7) Ansatz für Untersuchung der Lagebeziehung für a=0

Untersuchung auf gemeinsame Punkte:

$$g=h_a\Rightarrow\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\a\\4\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\a\\-6\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{matrix}I & 2 & + & s & = & 1 & + & 2t\\ II & 3 & & & = & a & + & at\\ III & -1 & - & 3s & = & 4 & - & 6t\end{matrix}$$

(8) Lagebeziehung für a=0

(9) Ansatz für Untersuchung der Lagebeziehung für a≠0

Betrachtet man I und III erhält man:

$$\begin{matrix}I & 1 & = & 2t & - & s & & 3 & = & 6t & - & 3s\\ III & -5 & = & -6t & + & 3s & \Rightarrow & -5 & = & -6t & + & 3s\\ & & & & & & & -2 & = & 0 & & & \textit{Widerspruch}\end{matrix}$$

(10) Untersuchung für a≠0

Also: $\begin{matrix}\textit{für } a=0 & \textit{echt parallel}\\ \textit{für } a\neq 0 & \textit{windschief}\end{matrix}$

(11) Lagebeziehung für a≠0

c)

Normalenvektor der xy-Ebene: $\vec{n}_{E_{xy}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (12) Normalenvektor der xy-Ebene

Schnittwinkel zwischen Gerade und Ebene: $\sin\varphi = \dfrac{\vec{r}_{h_a} \bullet \vec{n}_{E_{xy}}}{|\vec{r}| \cdot |\vec{n}_E|}$

$\varphi = 60° \Rightarrow \sin(\varphi) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Also: (13) Ansatz für Werte a

$$\frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ a \\ -6 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{40+a^2} \cdot 1} \Rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{-6}{\sqrt{40+a^2}} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{36}{40+a^2} \Rightarrow 40 + a^2 = 48$$ (14) Umformungen

$\Rightarrow a^2 = 8 \qquad \Rightarrow a_1 = -\sqrt{8} \qquad \wedge \qquad a_2 = \sqrt{8}$ (15) Werte a

d)

$h_{-4}: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\qquad A(2;3;16) \in i \quad mit\ i \perp h_{-4} \wedge i \perp g$

Da $i \perp g \Rightarrow \vec{r}_i = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ möglich. Überprüfe, ob $\vec{r}_i \bullet \vec{r}_{h_{-4}} = 0$ (16) Ansatz für Richtungsvektor der Geraden

$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = 3 + 0 - 3 = 0 \Rightarrow i \perp h_{-4}$ Also: $\quad i: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 16 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (17) Richtungsvektor der Geraden (18) Gleichung der Geraden

e)

$S_{x_k}(x_k;0;0)$ (19) Gleichung der

$\Rightarrow S_{x_k}\left(\frac{2}{2k-1};0;0\right)$ (20) Gleichung der

$S_{y_k}(0;y_k;0) \Rightarrow S_{y_k}(0;3;0)$ (21) Gleichung der

$S_{z_k}(0;0;z_k) \Rightarrow S_{z_k}\left(0;0;\frac{6}{2k-1}\right)$ (22) Gleichung der

$V_{Pyramide} = \frac{1}{3}A_G \cdot h = \frac{1}{3}\frac{x_k \cdot y_k}{2} \cdot z_k$ (23) Gleichung der

$$= \frac{1}{3}\frac{\frac{2}{2k-1} \cdot 3}{2} \cdot \frac{6}{2k-1} = \frac{1}{2k-1} \cdot \frac{6}{2k-1} = \frac{6}{(2k-1)^2}$$ (24) Gleichung der

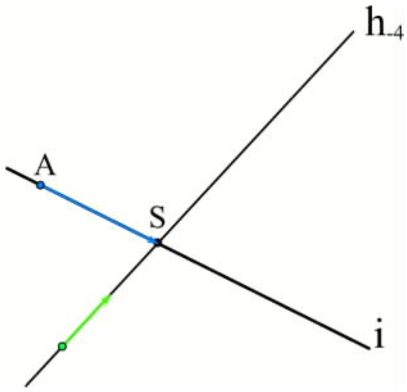
$$\frac{3}{2} = \frac{6}{(2k-1)^2} \Rightarrow (2k-1)^2 = 4 \xrightarrow{k>\frac{1}{2}} 2k-1 = 4 \Rightarrow 2k = 3 \Rightarrow k = \frac{3}{2}$$ (25) Gleichung der

zu Aufgabe d) (für die „umständliche“ Berechnung):
Beispiel:

$h_{-4}: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$A(2;3;16) \in i \quad mit\ i \perp h_{-4}$

und $S \in h_{-4} \wedge S \in i$



$\vec{r}_{h_{-4}} \bullet \overrightarrow{AS} = 0 \qquad \vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + t_S \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t_S \\ -4-2t_S \\ 4-3t_S \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 1+t_S \\ -4-2t_S \\ 4-3t_S \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+t_S \\ -7-2t_S \\ -12-3t_S \end{pmatrix}$

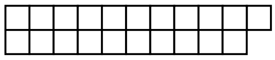
Also:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -1+t_S \\ -7-2t_S \\ -12-3t_S \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -1+t_S+14+4t_S+36+9t_S = 14t_S+49 = 0 \Rightarrow t_S = -\frac{49}{14} = -\frac{7}{2}$$

$$\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} -1-\frac{7}{2} \\ -7+2\cdot\frac{7}{2} \\ -12+3\cdot\frac{7}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} \\ 0 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Teil C – Stochastik

a) Ziehen ohne Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge
(Anzahl der k-Mengen aus einer n-Menge)
Anzahl für genau 10 mal sichtbar: $n = 21 \quad k = 10$



$$\Rightarrow \binom{n}{k} = \binom{21}{10} = 352\,716$$

(1) Anzahl genau 10 mal sichtbar

Anzahl in Reihe 1: k_1

Anzahl in Reihe 2: k_2

$$\binom{11}{4}\cdot\binom{10}{6}+\binom{11}{5}\cdot\binom{10}{5}+\binom{11}{6}\cdot\binom{10}{4}$$

(2) Ansatz für weitere Anzahl

Möglichkeiten: $= 330\cdot 210 + 462\cdot 252 + 462\cdot 210$

$= 282\,744$

(3) weitere Anzahl

b) Bernoullikette:
Logo genau 10 mal sichtbar: $n = 21$
$p = 0,5$
$k = 10$

(4) Charakterisierung der Zufallsgrößen

$$B(n;p;k) = \binom{n}{k}\cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

$$= \binom{21}{10}\cdot 0,5^{10}\cdot 0,5^{11} = \binom{21}{10}\cdot 0,5^{21}$$

$$= 0,1682$$

(5) erste Wahrscheinlichkeit

Logo höchstens 4 sichtbar:

$$P(Z\le 4) = P(Z=0)+P(Z=1)+P(Z=2)+P(Z=3)+P(Z=4)$$

$$= B(21;0,5;0)+B(21;0,5;1)+B(21;0,5;2)+B(21;0,5;3)+B(21;0,5;4)$$

$$= \underset{0,5}{\overset{21}{F}}(4)$$

$$= 0,0035987$$

(6) zweite Wahrscheinlichkeit

c) $H :=$ "*Heilung*" $\quad P(H) = 0,9$

$\bar{H} :=$ "*keine Heilung*" $\quad P(\bar{H}) = 0,1$

$E :=$ "mindestens einmal keine Heilung"

(7) Charakterisierung der Zufallsgrößen

$$P(E) > 0,95 \Leftrightarrow 1 - P(\bar{E}) > 0,95$$

$$\Leftrightarrow 1 - 0,9^n > 0,95 \Leftrightarrow 0,9^n < 0,05 \Leftrightarrow n\ln 0,9 < \ln 0,05$$

$$\Rightarrow n = \frac{\ln 0,05}{\ln 0,9} = 28,43$$

(8) Ansatz für Anzahl

Es müssen mindestens 29 Karten entnommen werden.

(9) Anzahl

d) Normalverteilung mit $E(X) = 100 \quad \sigma(X) = 2$

$$P(95 \le X \le 103) = F(103) - F(95) \approx \Phi\left(\frac{103-100}{2}\right) - \Phi\left(\frac{95-100}{2}\right)$$

(10) Ansatz für Wahrscheinlichkeit p

$$= \Phi\left(\frac{3}{2}\right) - \Phi\left(-\frac{5}{2}\right) = \Phi\left(\frac{3}{2}\right) - \left(1 - \Phi\left(-\frac{5}{2}\right)\right)$$

$$= 0,9332 - (1 - 0,9938) = 0,927$$

(11) Wahrscheinlichkeit p

e) Normalverteilung mit $E(X) = 100a \; \sigma(X) = 2a \quad a \in \mathbb{R} \wedge a > 0$

Wir können schlussfolgern, dass $a < 1$ ist, denn die maximale Abweichung nach oben darf ja höchstens 1 mg sein.

Also gilt:

$$P(X > 101) = 1 - P(X \leq 101) < \frac{1}{1000}$$

(12) Ansatz für Wert a

Also:

$$1 - \Phi\left(\frac{101 - 100a}{2a}\right) < \frac{1}{1000} \Rightarrow -\Phi\left(\frac{101 - 100a}{2a}\right) < -0,999 \Rightarrow \Phi\left(\frac{101 - 100a}{2a}\right) > 0,999$$

(13) Umformung 1

Also:

$$\frac{101 - 100a}{2a} \geq 3,1 \Rightarrow 101 - 100a \geq 6,2a \Rightarrow 101 \geq 106,2a$$

(14) Umformung 1

$\Rightarrow a \leq 0,951$

Hinweis:

Arbeitet man mit Korrektur erhält man:

$$\frac{101 - 100a + 0,5}{2a} \geq 3,1 \Rightarrow 101,5 - 100a \geq 6,2a \Rightarrow 101,5 \geq 106,2a$$

$\Rightarrow a \leq 0,9557$

(15) Wert a

Teil D1 – Analysis

a) $w_{n+1} = w_n \cdot (1,44 - 0,002 \cdot w_n); w_1 = 5,0$

n	1	2	3	4
w_n	5	7,15	10,913	14,471

(1) Näherungswerte für w_1, w_2, w_3

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= w_n \cdot (1,44 - 0,002 \cdot w_n) \\ &= 1,44 w_n - 0,002 w_n^2 \\ &= w_n + 0,44 w_n - 0,002 w_n^2 \\ &= w_n + 0,002 w_n (220 - w_n) \end{aligned}$$

(2) Nachweis der Äquivalenz

Allgemein also: $w_n = w_n + q \cdot w_n (G - w_n)$

mit $G = 220$

$q = 0,002$

(3) Wert für G

(4) Wert für q

b) $$h(t) = \frac{220}{1 + b \cdot e^{-at}} = \frac{220}{1 + \frac{b}{e^{at}}} = \frac{220e^{at}}{e^{at} + b}$$

$$h'(t) = \frac{220a \cdot e^{at}\left(e^{at} + b\right) - 220e^{at} \cdot a \cdot e^{at}}{\left(e^{at} + b\right)^2}$$

(5) Ableitung

$$= \frac{220a\left(e^{at}\left(e^{at} + b\right) - e^{at} \cdot e^{at}\right)}{\left(e^{at} + b\right)^2} = \frac{220abe^{at}}{\left(e^{at} + b\right)^2} = \frac{ae^{at}}{\left(e^{at} + b\right)} \cdot \frac{220b}{\left(e^{at} + b\right)}$$

$$= \frac{ae^{at}}{\left(e^{at} + b\right)} \cdot \frac{220e^{at} + 220b - 220e^{at}}{\left(e^{at} + b\right)} = \frac{220ae^{at}}{220\left(e^{at} + b\right)} \cdot \frac{220\left(e^{at} + 220b\right) - 220e^{at}}{\left(e^{at} + b\right)}$$

(6) Ansatz für Nachweis

$$= \frac{a}{220} h(t) \cdot \left(220 - \frac{220e^{at}}{\left(e^{at} + b\right)}\right) = \frac{a}{220} h(t) \cdot \left(220 - h(t)\right)$$

(7) Nachweis

c) $h(t) = \dfrac{220}{1 + b \cdot e^{-at}} \Rightarrow (1) \qquad 20,4 = \dfrac{220}{1 + b \cdot e^{-5a}} \wedge (2) \qquad 92,9 = \dfrac{220}{1 + b \cdot e^{-10a}}$

(8) Gleichungssystem

Umstellen von (1):

$$20,4 = \frac{220}{1 + b \cdot e^{-5a}} \Rightarrow 20,4 \cdot \left(1 + b \cdot e^{-5a}\right) = 220 \Rightarrow 1 + b \cdot e^{-5a} = \frac{220}{20,4}$$

$$\Rightarrow b \cdot e^{-5a} = \frac{220}{20,4} - 1 \Rightarrow e^{-5a} = \frac{\frac{220}{20,4} - 1}{b}$$

Einsetzen in (2):

$$92,9 = \frac{220}{1 + b \cdot e^{-10a}} = \frac{220}{1 + b \cdot \left(e^{-5a}\right)^2} = \frac{220}{1 + b \cdot \left(\frac{\frac{220}{20,4} - 1}{b}\right)^2}$$

(9) Ansatz zur Ermittlung der Werte a und b

$$\Rightarrow 92,9\cdot\left(1+b\cdot\left(\frac{\frac{220}{20,4}-1}{b}\right)^2\right)=220 \Rightarrow 92,9\cdot\left(1+\frac{\left(\frac{220}{20,4}-1\right)^2}{b}\right)=220$$

$$\Rightarrow 92,9\cdot\left(\frac{b+\left(\frac{220}{20,4}-1\right)^2}{b}\right)=220 \Rightarrow 92,9\cdot b+92,9\cdot\left(\frac{220}{20,4}-1\right)^2=220b$$

$$\Rightarrow 127,1b=92,9\cdot\left(\frac{220}{20,4}-1\right)^2 \Rightarrow b=\frac{92,9\cdot\left(\frac{220}{20,4}-1\right)^2}{127,1}\approx 69,9730658\approx 69,973$$ (10) Näherungswert b

$$e^{-5a}=\frac{\frac{220}{20,4}-1}{69,973}\Rightarrow -5a=\ln\left(\frac{\frac{220}{20,4}-1}{69,973}\right)\Rightarrow a=\frac{\ln\left(\frac{\frac{220}{20,4}-1}{69,973}\right)}{-5}\approx 0,3934659861\approx 0,393$$ (11) Näherungswert a

$$h(25)=\frac{220}{1+69,973\cdot e^{-0,393\cdot 25}}[cm]\approx 219,1705896\,cm\approx 219,2\ cm$$ (12) Wachstumshöhe

d) Zunächst ermittelt man, wann die Wachstumsgeschwindigkeit und damit die 1. Ableitung den Maximalwert hat.
Das kann man über das Grafikmenü des GTR bestimmen. (13) Lösungsidee

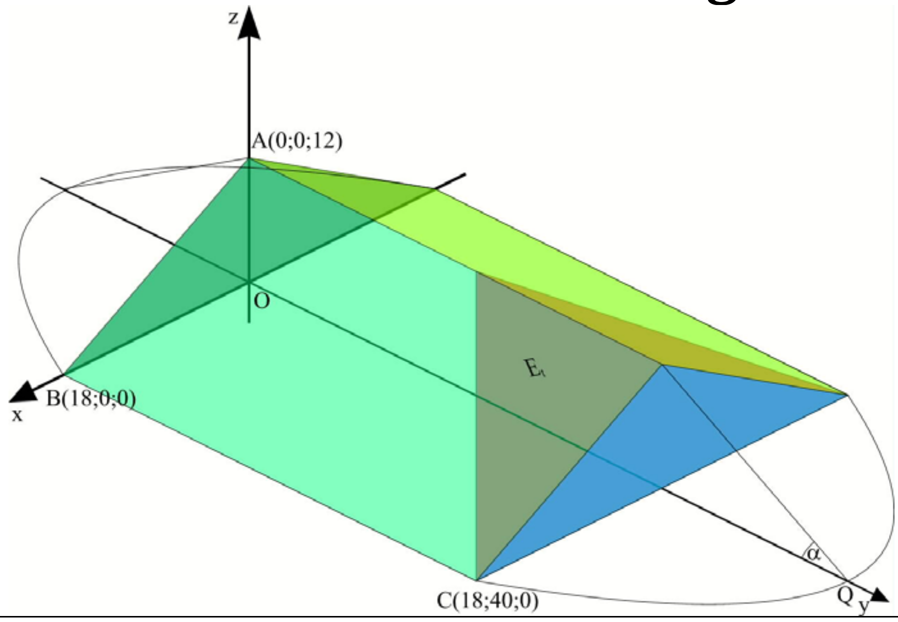
$$h'(t)=\frac{220abe^{at}}{\left(e^{at}+b\right)^2}\xrightarrow{a=0,4\wedge b=70}h'(t)=\frac{220\cdot 0,4\cdot 70\cdot e^{0,4t}}{\left(e^{0,4t}+70\right)^2}=\frac{6160\cdot e^{0,4t}}{\left(e^{0,4t}+70\right)^2}$$

Über das Grafikmenü des GTR, in dem man die erste Ableitung eingegeben hat, kann man mittels des Grafiksolvers die Extremstelle (Maximum) der ersten Ableitung ermitteln: (14) Ansatz für Zeit

$x_{max}\approx 10,62123773$

Da man eine Woche vorher düngen soll, ergibt sich, dass nach ca. 9.6 Wochen die Düngung erfolgen muss. (15) Ergebnis

Teil D2 – Geometrie / Algebra



a)

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}\right) = \arctan\left(\frac{12}{17}\right)$$ (1) Ansatz für Böschungswinkel

$$= 33{,}69°$$ (2) Ansatz für Böschungswinkel

Volumenberechnung:

$$V_{Halde} = V_{Kegel} + V_{Prisma} = \frac{\pi}{3}\cdot\overline{OB}^2\cdot\overline{OA} + \overline{OB}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{BC}$$

$$= \frac{\pi}{3}\cdot 18^2\cdot 12 + 18\cdot 12\cdot 40 \quad \left[m^3\right]$$ (3) Ansatz für Volumen

$$= 12711{,}5\ m^3$$ (4) Volumen

Oberflächeninhalt:

Berechne $\overline{AB}$ $\quad \overline{AB} = \sqrt{\overline{OB}^2 + \overline{OA}^2} = \sqrt{12^2 + 18^2}\,[m] = \sqrt{468}\ m$

$$A_O = 2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{BC} + A_{Kegelmantel} = 2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{BC} + \pi\cdot\overline{OB}\cdot\overline{AB}$$ (5) Ansatz für Oberflächeninhalt

$$= 2\cdot\sqrt{468}\cdot 40 + \pi\cdot 18\cdot\sqrt{468}\ \left[m^2\right]$$

$$= 2954\ m^2$$ (6) Oberflächeninhalt

b) $E_t: \quad 2y + 3z = 116 - 2t \quad (t\in\mathbb{R} \wedge 0 \le t \le 40) \quad C(18;40;0)$ (7) Ansatz für Wert t

$$2\cdot 40 + 3\cdot 0 = 116 - 2t \Rightarrow t = \frac{80-116}{-2} = 18$$ (8) Wert t

Also: $E_{18}: \quad 2y + 3z - 80 = 0 \qquad HNF: \frac{2y+3z-80}{\sqrt{13}} = 0$

Schnittpunkt S der Parallelen g zu OQ durch A mit der Ebene E_{18}:

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\12\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow 2\cdot(0+r) + 3\cdot 12 - 80 = 0 \Rightarrow r = 22 \qquad \Rightarrow S(0;22;12)$$ (9) Ansatz für Höhe der Pyramide

Höhe der Pyramide: $h_{Pyramide} = 40 - 22\,[m] = 18\ m$ (10) Höhe der Pyramide

$$V_{Abraum} = V_{Pyramide} + \frac{1}{2}V_{Kegel} = \frac{1}{3}\cdot\overline{OB}\cdot\overline{OA}\cdot h_{Pyramide} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\pi\cdot\overline{OB}^2\cdot\overline{OA}$$

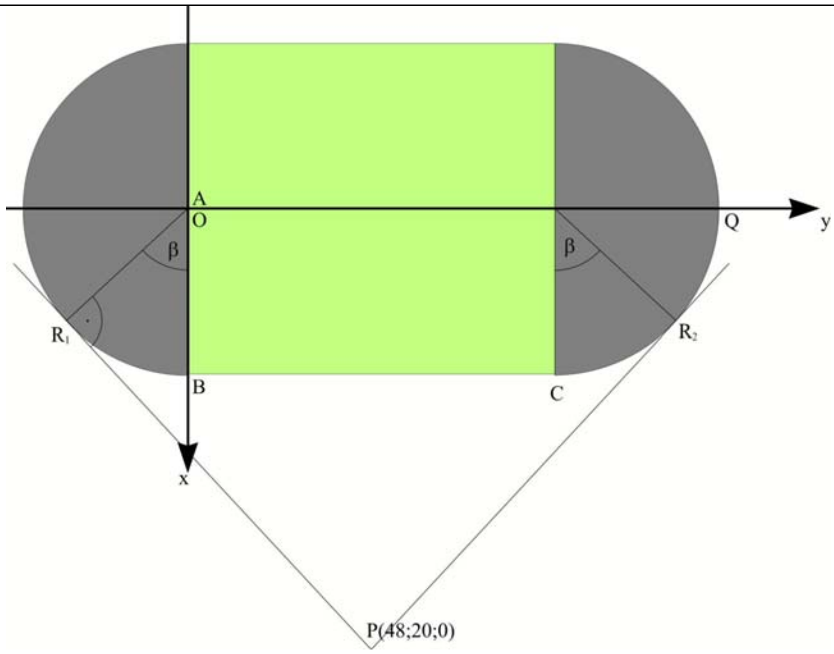
$$= \frac{1}{3}\cdot 18\cdot 12\cdot 18 + \frac{1}{6}\pi\cdot 18^2\cdot 12 \quad \left[m^3\right]$$

(11) Ansatz für Volumen

$$= 3331,75\ m^3$$

(12) Volumen

c)



Da der Punkt P in der xy-Ebene liegt können wir uns auf diese Ebenen beschränken. Da der Beobachtungspunkt zudem symmetrisch zum Körper liegt, genügt zunächst die Betrachtung einer Seite. Ich wähle die linke Seite, da dort der Kreis ein Ursprungskreis ist.

Gegeben sind der Kreis mit $M\left(0;0\right)\wedge r = 18$ sowie der Punkt $P\left(48;20\right)$.

Gesucht

Tangentengleichung an einem Kreis von einem Punkt P aus:

$$\left(x_P - x_M\right)\left(x - x_M\right) + \left(y_P - y_M\right)\left(y - y_M\right) = r^2$$

$$P\left(48;20\right)\wedge M\left(0;0\right)\wedge r = 18 \Rightarrow 48x + 20y = 324$$

$$\Rightarrow y = -2,4x + 16,2$$

Man hat nun die Gleichung der Polaren, also der Geraden, auf der die beiden Berührungspunkte der Tangenten von P an den Ursprungskreis liegen. Einer dieser Berührungspunkte ist der interessierende Punkt R_1.

Nun ist R_1 sowohl Element der Polaren, als auch Element des Ursprungkreises. Der Skizze entnehmen wir, dass die x-Koordinate des Punktes R_1 positiv ist:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad mit \quad y = -2,4x + 16,2 \quad und \quad r = 18$$

$$\Rightarrow x^2 + \left(-2,4x + 16,2\right)^2 = 324$$

$$\Rightarrow x^2 + 5,76x^2 - 77,76x + 262,44 = 324$$

$$\Rightarrow 6,76x^2 - 77,76x - 61,56 = 0 \qquad \Rightarrow x_1 = 12,247 \qquad x_2 = -0,743$$

Also $x_{R_1} \approx 12,247 \quad \Rightarrow y_{R_1} \approx -13,193$

(13) Ansatz für Zentriwinkel des Kreisbogens

Berechnung des Winkels β:

$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{OR} \bullet \overrightarrow{OB}}{\left|\overrightarrow{OR}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OB}\right|}$$

$$\approx \frac{\begin{pmatrix} 12,247 \\ -13,193 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 18 \\ 0 \end{pmatrix}}{18 \cdot 18} = \frac{12,247 \cdot 18}{18 \cdot 18} = \frac{12,247}{18}$$

$$\approx 0,6804 \Rightarrow \beta \approx 47,126°$$

(14)
Größe des Zentriwinkels

Berechnung des sichtbaren Kreisbogens:

$$b = 2\pi r \cdot \frac{\beta}{360} = 2 \cdot \pi \cdot 18 \cdot \frac{47,126°}{360°} \,[m] \approx 14,8m$$

Berechnung der sichtbaren Fläche eines Kegels:

$$A_{KS} = \frac{b \cdot r}{2} = \frac{b \cdot \overline{AB}}{2} = \frac{14,8 \cdot \sqrt{468}}{2} \left[m^2\right] = 160,14\ m^2$$

Berechnung der sichtbaren Fläche:

$$A_S = 2 \cdot A_{KS} + \overline{AB} \cdot \overline{BC} = 2 \cdot 160,14 + \sqrt{468} \cdot 40 \ \left[m^2\right] = 1185,61\ m^2$$

(15)
sichtbarer Teil der Haldenoberfläche