Schriftliche Abiturprüfung – Grundkursfach – Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Aus rechtlichen Gründen möchte ich Sie darauf hinweisen, dass Sie sich auf einer **privaten** Seite befinden. Insbesondere ist dies **kein** Produkt des Sächsischen Staatsministeriums für Kultus, welches die Abituraufgaben entwickelt.

Dies ist die Abschrift der Prüfungsaufgaben 2005, wie sie vom Sächsischen Staatsministeriums für Kultus auf dem Sächsischen Schulserver (www.sachsen-macht-schule.de) veröffentlicht wurden.

Außerdem sollten Sie folgendes wissen:

- Lösungen der Aufgaben können auf unterschiedlichen Wegen erreicht werden. Hier finden Sie VORSCHLÄGE zur Lösung und VORSCHLÄGE zur Bewertung, die nicht für die Bewertung Ihres Abiturs herangezogen werden können. Dafür ist jeder prüfende Fachlehrer verantwortlich.
- Ich habe versucht, den graphikfähigen Taschenrechner (GTR – hier TI 82/83/83+) besonders häufig einzusetzen. Damit sollen Möglichkeiten aufgezeigt werden, auch wenn eine Rechnung vielleicht schneller zum Ziel führen würde.
- Eingesetzte Programme finden Sie auf den Mathe-Seiten des sächsischen Schulservers unter www.sn.schule.de/~matheabi dokumentiert und anhand von vielen Beispielen erklärt. Insbesondere möchte ich auf eine zusammenfassende Broschüre zu diesem Thema verweisen: www.sn.schule.de/~matheabi/data/gtrZsfsg.pdf.
- Die **offiziellen** Abituraufgaben werden nach Beendigung der Prüfungsphase auf dem Sächsischen Schulserver veröffentlicht.
- Für Nachfragen und Ihre Hinweise stehe ich Ihnen gerne zur Verfügung: F. Müller (mathe@oskar-reime-gymnasium.de) – Mathe-Lehrer.
  Dieses Dokument wurde zuletzt aktualisiert am 06.04.06.
- Wenn Sie Fehler finden oder Ergänzungen haben, teilen Sie mir das bitte mit.

Material für den Prüfungsteilnehmer

Allgemeine Arbeitshinweise

Ihre Arbeitszeit (einschließlich der Zeit für das Lesen der Aufgabentexte und der Zeit für die Auswahl der Wahlaufgabe) beträgt 240 **Minuten.**

Auf dem Deckblatt der Arbeit haben Sie den verwendeten GTR-Typ anzugeben.

Die Prüfungsarbeit besteht aus den zu bearbeitenden Pflichtteilen **A, B** und **C** sowie dem **Wahlteil W.**
Es sind alle Aufgaben der Pflichtteile zu bearbeiten.
Aus dem Teil W ist **genau eine** der beiden Aufgaben zu bearbeiten.
Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionen) Hilfslinien muss deutlich erkennbar in gut lesbarer Form dargestellt werden.

Bei Verwendung von GTR-Programmen ist anzugeben, aus welchen Eingabedaten das Programm welche Ausgabendaten berechnet.

Insgesamt sind 60 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar, davon
- im Teil A 25 BE,
- im Teil B 15 BE,
- im Teil C 10 BE,
- im Teil W 10 BE.

Erlaubte Hilfsmittel:

1 Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung
1 grafikfähiger, programmierbarer Taschenrechner (GTR) ohne Computer-Algebra-System
1 Tabellen- und Formelsammlung ohne ausführliche Musterbeispiele (im Unterricht eingeführt)
Zeichengeräte

Bewertungsmaßstab

Pkte.	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
60 BE	60-58	57-55	54-52	51-49	48-46	45-43	42-40	39-37	36-34	33-31	30-28	27-25	24-21	20-17	16-13	12-0

Prüfungsinhalt

Pflichtaufgaben

Teil A: Analysis

Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = \frac{2x+4}{3-x}$ ($x \in \mathbf{D}_f$).

a) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion f und die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen dieser Funktion mit den Koordinatenachsen an.
Untersuchen Sie den Graphen der Funktion f auf achsenparallele Asymptoten und geben Sie deren Gleichungen an.
Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Graph der Funktion f keine lokalen Extrempunkte besitzt.
Geben Sie den Wertebereich der Funktion f an. Erreichbare BE-Anzahl: 9

b) Es existieren genau zwei Tangenten an den Graphen der Funktion f, die senkrecht zur Geraden mit der Gleichung $y = -\frac{2}{5}x$ ($x \in \mathbb{R}$) verlaufen.
Ermitteln Sie eine Gleichung einer dieser Tangenten. Erreichbare BE-Anzahl: 3

c) Für jedes u ($u \in \mathbb{R}$; $3 < u < 10$) sind die Punkte $P_u(u \mid f(u))$, $Q_u(u \mid 0)$ und $R(-2 \mid 0)$ Eckpunkte eine Dreiecks. Es gibt genau ein solches Dreieck mit minimalem Flächeninhalt.
Ermitteln Sie diesen Flächeninhalt. Erreichbare BE-Anzahl: 3

d) Gegeben ist die Funktion F durch $F(x) = -10 \ln(3 - x) - 2x$ ($x \in \mathbf{D_F}$).
Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich $\mathbf{D_F}$ der Funktion F an.
Weisen Sie nach, dass für alle $x \in \mathbf{D_F}$ die Funktion F eine Stammfunktion der Funktion f ist.
Der Graph der Funktion f, die Gerade $x = v$ ($v \in \mathbb{R}$; $-2 < v < 3$) und die Abszissenachse begrenzen eine Fläche A_1 vollständig.
Ermitteln Sie den Wert v, so dass der Inhalt dieser Fläche $10 \ln 5 - 8$ beträgt.
Der Graph der Funktion f und die Koordinatenachsen begrenzen eine Fläche A_2 vollständig.
Geben Sie mit einem Näherungswert an, um wie viel Prozent die Fläche A_2 kleiner als die Fläche $A_1 = 10 \ln 5 - 8$ ist. Erreichbare BE-Anzahl: 7

e) Für jedes a ($a \in \mathbb{R}$) ist eine Funktion g_a durch $g_a(x)=f(x)+a$ ($x \in \mathbf{D_{ga}}$) gegeben. Es existieren Werte a, für die der Graph der Funktion g_a und die Koordinatenachsen im zweiten Quadranten eine Fläche vollständig begrenzen.
Geben Sie alle Werte für a an, die diese Bedingung erfüllen. Begründen Sie.
Erreichbare BE-Anzahl: 3

Teil B: Geometrie /Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(-6 \mid -5 \mid 2)$, $B(-1 \mid -5 \mid 2)$, $C(-3 \mid -1 \mid 2)$ und $P_a(a \mid 2a \mid -a/3)$ ($a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$) gegeben.

a) Weisen Sie nach, dass das Dreieck ABC gleichschenklig, aber nicht gleichseitig ist.
Erreichbare BE-Anzahl: 2

b) Die Punkte A, Bund C bestimmen eine Ebene E.
Beschreiben Sie die besondere Lage der Ebene E im kartesischen Koordinatensystem.
Für genau einen Wert a liegt der zugehörige Punkt Pa in der Ebene E. Ermitteln Sie diesen Wert für a. Erreichbare BE-Anzahl: 3

c) Begründen Sie, dass genau ein Punkt Q existiert, für den die Punkte A, B, C und Q Eckpunkte eines Rhombus sind.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes Q. Erreichbare BE-Anzahl: 3

d) Das Dreieck ABC ist Grundfläche von Pyramiden.
Ermitteln Sie die Koordinaten eines möglichen Punktes für die Spitze einer solchen Pyramide, deren Volumen 100 beträgt. Erreichbare BE-Anzahl: 3

e) Das Dreieck A'B'C' entsteht durch senkrechte Projektion des Dreiecks ABC in die x-y-Koordinatenebene. Der Kreis k ist Umkreis des Dreiecks A'B'C'.
Geben Sie jeweils eine Gleichung einer Sekante, einer Tangente und einer Passante bezüglich des Kreises k an. Erreichbare BE-Anzahl: 4

Teil C: Stochastik

Der Radiosender "Freestyle" wählt jeden seiner gespielten Titel zufällig durch einen Computer aus. Bei diesen Titeln handelt es sich zu 30% um englische, zu 25% um deutsche und zu 15% um italienische Titel.

a) Lutz schaltet das Radio ein, während gerade ein Titel läuft.
Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass dieser Titel weder ein italienischer noch ein englischer ist. Erreichbare BE-Anzahl: 1

b) Fred hört an einem Nachmittag auf diesem Sender 24 Titel.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse: Ereignis A: Er hört keinen deutschen Titel.

Ereignis B: Er hört genau drei englische Titel.
Ereignis C: Die Anzahl der von ihm gehörten deutschen Titel weicht um höchstens 2 von der zu erwartenden Anzahl deutscher Titel ab. Erreichbare BE-Anzahl: 4

c) Berechnen Sie, wie viele Titel Fred mindestens hören muss, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 98% wenigstens einen deutschen Titel hört. Erreichbare BE-Anzahl: 2

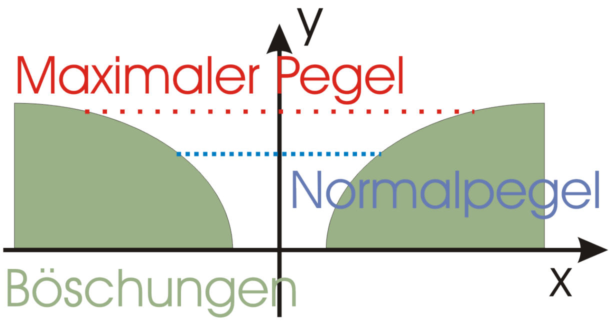
d) Der Radiosender will täglich mit 5 Kandidaten das Spiel "Musik-Doppelpack" spielen. Dabei muss der Kandidat eine beliebige Uhrzeit angeben.
Werden unmittelbar nach dieser Zeit in direkter Aufeinanderfolge zwei englische Titel gespielt, so erhält der Kandidat 150 €, bei zwei deutschen Titeln 200 € und bei zwei italienischen Titeln z Euro ($z \in \mathbb{R}$). In allen anderen Fällen bekommt der Kandidat nichts ausgezahlt.
Der Sender möchte durchschnittlich pro Tag höchstens 175 € auszahlen.
Ermitteln Sie den maximal möglichen Wert für z. Erreichbare BE-Anzahl: 3

Teil D: Wahlaufgaben

Wählen Sie genau eine der folgenden Aufgaben zur Bearbeitung aus.

Wahlaufgabe 1

Die Skizze (nicht maßstäblich) zeigt den Querschnitt eines Hochwasserüberlaufkanals. Die y-Achse ist Symmetrieachse des Querschnitts. Eine der beiden Böschungslinien kann näherungsweise in einem kartesischen Koordinatensystem durch die Funktion f mit $f(x)=\sqrt{x-1}$ ($x \in \mathbf{D}_f$) beschrieben werden. Eine Längeneinheit entspricht einem Meter. Der maximale Pegel beträgt 2,0 m, der Normalpegel 1,6 m.



a) Geben Sie die Breite der Wasseroberfläche bei maximalem Pegel an. Erreichbare BE-Anzahl: 1

b) Ermitteln Sie rechnerisch den prozentualen Zuwachs der Querschnittsfläche des mit Wasser gefüllten Teils des Kanals, wenn der Pegel vom Normalpegel bis zum maximalen Pegel steigt. Erreichbare BE-Anzahl: 3

c) Ein kritischer Pegel wird erreicht, wenn der Neigungswinkel der Böschungslinie gegenüber der Wasseroberfläche 165° überschreitet.
Ermitteln Sie einen Näherungswert für diesen kritischen Pegel.
Erreichbare BE-Anzahl: 3

d) Von einem Punkt P(10 | 5) aus soll der Kanal überwacht werden.
Untersuchen Sie, ob bei Normalpegel die gesamte Breite der Wasseroberfläche einsehbar ist.
Erreichbare BE-Anzahl: 3

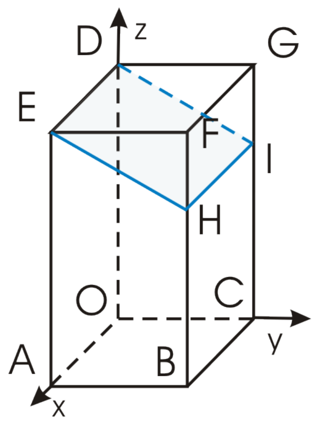


Abbildung 1: Skizze nicht maßstäblich

Wahlaufgabe 2

Aus einem Quader mit einer Höhe h und einer quadratischen Grundfläche mit der Seitenlänge von 5,0 dm soll ein Gedenkstein hergestellt werden.
In einem kartesischen Koordinatensystem befindet sich die quadratische Grundfläche OABC in der x-y-Koordinatenebene (siehe Skizze – Skizze nicht maßstäblich). Eine Längeneinheit entspricht einem Dezimeter.

Der Gedenkstein OABCDEHI entsteht durch Abtrennen eines Teils des Quaders. Die Schnittfläche liegt dabei in der Ebene mit der Gleichung
$2y + 5z = 60$.

a) Zur Ermittlung der Herstellungskosten ist die Kenntnis der Größe der Schnittfläche erforderlich. Berechnen Sie den Inhalt der Schnittfläche in Quadratdezimetern. Erreichbare BE-Anzahl: 4

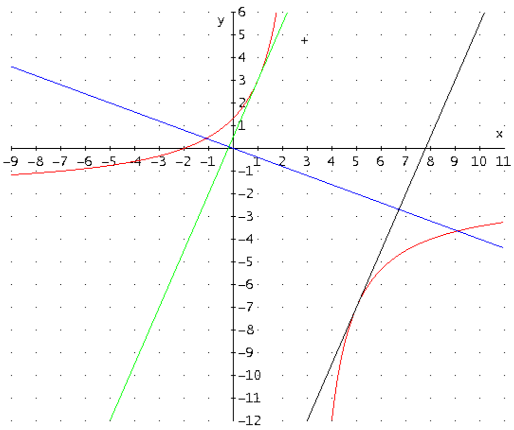
b) Bei der Gravur der Schrift auf den Gedenkstein tritt erfahrungsgemäß bei einem von 600 Zeichen eine Beschädigung des Steines auf. Die Art des Zeichens spielt dabei keine Rolle.
Ermitteln Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit der Stein nicht beschädigt wird, wenn die Gedenkschrift aus 34 Zeichen besteht.
Erreichbare BE-Anzahl: 2

c) Aus dem vom Quader abgetrennten dreiseitigen Prisma soll ein neuer Quader mit maximalem Volumen hergestellt werden.
Bestimmen Sie die Abmessungen dieses Quaders. Erreichbare BE-Anzahl: 4

Lösungsvorschläge

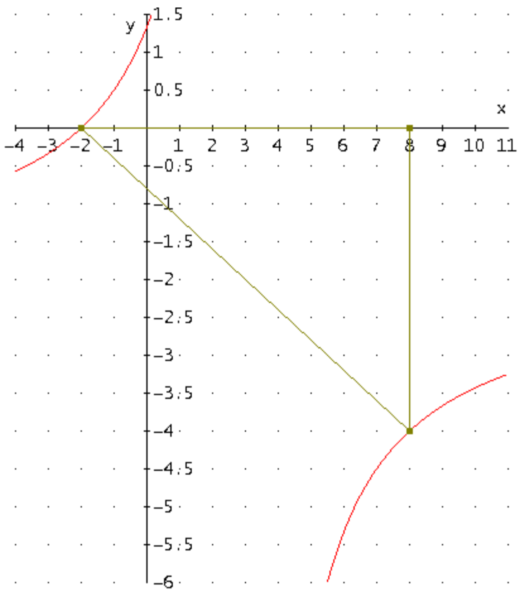
Teil A

a) größtmöglicher Definitionsbereich: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$
Koordinaten des Schnittpunktes mit der x-Achse: $P_x(-2 \mid 0)$
Koordinaten des Schnittpunktes mit der y-Achse: $P_y(0 \mid 4/3)$
Untersuchung auf senkrechte Asymptoten: $3 - x_p = 0$
Untersuchung auf waagerechte Asymptoten:
$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -2$
Gleichungen der Asymptoten: z. B. x = 3, y = -2
1. Ableitung der Funktion f: $f'(x) = \frac{10}{(3-x)^2}$
Nachweis für die Nichtexistenz lokaler Extrempunkte
Wertebereich: $W_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ 9 BE



b) Ansatz für Abszissen der Berührungspunkte: $f'(x_S) = 5/2$
Abszisse eines Berührungspunktes: $x_{S1} = 1$; $x_{S2} = 5$
Gleichung einer Tangente: z. B. $y = 5/2\,x + ½$ oder
$y = 5/2\,x - 39/2$ 3 BE

c) Zielfunktion: $A(u) = ½ \cdot (u+2) \cdot f(u)$
Ansatz für min. Fläche: $A'(u_e) = 0$; $u_e = 8$
oder GTR: `fMin(A(u),u,3,10)` → 8
minimaler Flächeninhalt: $A_{MIN} = 20$ 3 BE



d) größtmöglicher Definitionsbereich:
$D_F = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x < 3\}$
Nachweis der Stammfunktion (2 BE): $F'(x)=f(x)$
Ansatz für Flächeninhalt: $F(v) - F(2) = 10 \cdot \ln 5 - 8$
Ansatz für Wert v
Wert v: v = 2
$A_2 = F(-2) - F(0) = 10 \cdot \ln(5/3) - 4 \Rightarrow 13{,}7\%$ kleiner
Ergebnis: $p \approx 86\%$ 7 BE

e) Werte a: $-4/3 < a < 2$
a verschiebt die Kurve in y-Richtung
Begründung für untere Grenze: $f(0) < a$
Begründung für obere Grenze: $a < 2$
da sonst keine negative Nullstelle entsteht

Teil B

a) Nachweis für Gleichschenkligkeit: $\overline{AB} = \overline{AC} = 5$
Nachweis, dass das Dreieck nicht gleichseitig ist: $\overline{BC} = 2\sqrt{5}$ 2 BE

b) Beschreibung der Lage der Ebene E: z. B.: prgmGEOMETRI | Ebene | Dreipunkt | Eingabe ABC
→ besondere Lage: parallel zur x- und y-Achse: E: z = 2 und $x,y \in \mathbb{R}$
Ansatz für Wert a: $P_a \subset E \Leftrightarrow -a/3 = 2$
Wert a: a = -6 3 BE

c) Begründung: das Dreieck ist gleichschenklig, die gleichlangen Schenkel sind zwei seiten der Raute
Ansatz für Koordinaten des Punktes Q: $\vec{OQ} = \vec{OB} + \vec{AC}$
Koordinaten des Punktes Q: Q (2 | -1 | 2) 3 BE

d) Grundfläche der Pyramide: $A_G = 10$
Höhe der Pyramide: $V_{Pyramide} = 100 = 1/3\ A_G \cdot h \Rightarrow h = 30 \Rightarrow S(x \mid y \mid 2 \pm 30)$ mit $x,y \in \mathbb{R}$
Koordinaten eines möglichen Punktes: z. B. S (0 | 0 | 32) 3 BE

e) Koordinaten des Umkreismittelpunktes: (-7/2 | -15/4)
GTR: prgmGEOMETRI: Dreieck | Umkreis | Eingabe von A'(-6 | -5), B'(-1 | -5), C'(-3 | -1)
eine Gleichung einer Sekante: y = x
eine Gleichung einer Tangente: z. B.: Tangente in C y = -(2x+17)/11
eine Gleichung einer Passante: y = -x

Teil C

a) Wahrscheinlichkeit: p = 0,55 1 BE

b) Wahrscheinlichkeit für Ereignis A: P(A) ≈ 0,0010
Wahrscheinlichkeit für Ereignis B: P(B) ≈ 0,0305
Ansatz für Wahrscheinlichkeit für Ereignis C: $E = 24 \cdot 25\% = 6 \Rightarrow P(C) = b_{24;.25}(4 \le k \le 8)$
TI-82: prgmWARSCHE
TI-83: Menü `Dist` | `binomcdf(24,.25,8) - binomcdf(24,.25,3)`
Wahrscheinlichkeit für Ereignis C: P(C) ≈ 0,7637 4 BE

c) Ansatz: $1-(1-.25)^n \ge 98\%$
Ergebnis: mindestens 14 Titel 2 BE

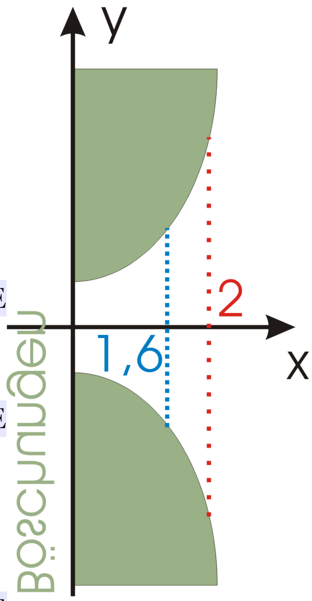
d) Wahrscheinlichkeitsverteilung
Ansatz für Wert z: .09 ·150 € + .0625 ·200 € + .0225 ·z = 175 €
Wert z: z = 400 € 3 BE

e	*P(e)*	*Gewinn*
(e, e)	30%² = 0.09	150 €
(d, d)	25%² = .0625	200 €
(i, i)	15%² = .0225	Z
Sonst	.825	0 €

Teil W1

a) Breite: b = 10m 1 BE

b) Variante I: Vertauschen der x- und y-Achse
führt zur Umkehrfunktion $y = f^{-1}(x) = x^2 + 1$ und unter Ausnutzung der
Symmetrieverhältnisse: $\int_0^{1,6} x^2+1\,dx = \frac{1112}{375}$ Zuwachs $\int_{1,6}^{2} x^2+1\,dx = \frac{638}{375}$
Querschnittsfläche bei Normalpegel: Flächen sind doppelt so groß, wie oben angegeben; das Verhältnis erhält man jedoch auch mit diesen Zahlen
Querschnittfläche bei maximalem Pegel
prozentualer Flächenzuwachs: p ≈ 57% 3 BE



c) Anstieg der Tangente: m = atan(180°-165°)
Ansatz für kritischen Pegel: $f'(x) = m \rightarrow 4.8131 \Rightarrow f(4.8131) \approx 1.953$
kritischer Pegel: h ≈ 1,9 m 3 BE

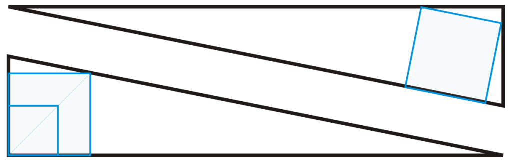
d) Lösungsidee: z. B.: die Tangente an den Graphen von f im Punkt
P(u | f(u)=1,6) muss für x = 10 einen kleineren y-Wert als 5 besitzten.
u = 3.56 ⇒ t: y = (25x + 39)/80 mit x = 10 ⇒ y = 3.6 < 5
Untersuchung zur Einsehbarkeit
Aussage zur Einsehbarkeit: Gesamte Breite ist einsehbar. 10BE

Teil W2

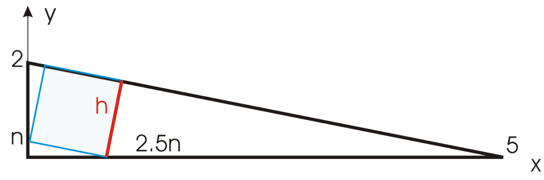
a) z-Koordinate eines Punktes D oder E: 12
z-Koordinate eines Punktes H oder I: 10
Ansatz für Flächeninhalt: $A = 5 \cdot \sqrt{(5^2 + 2^2)} \approx 2693\ \text{cm}^2$
Flächeninhalt: $A \approx 27\ \text{dm}^2$ 4 BE

b) Ansatz für Wahrscheinlichkeit: $b_{34;1/600}(k=0) = (599/600)^{34}$
Wahrscheinlichkeit: $p \approx 0{,}9449$ 2 BE

c) Ansatz für Zielfunktion (2 BE):



Es gilt zwei Möglichkeiten zu überprüfen (siehe Abbildung: die Katheten sind 5 dm und 2 dm).
Am einfachsten ist unten zu sehende Fall zu lösen.
Das Koordinatensystem ergibt sich aus den Seiten des Dreiecks, die dritte Seite hat die Gleichung
$y = -2/5\ x + 2$. Damit ist der Flächeninhalt
$A_{unten}(x) = x\ y \Rightarrow A'_{unten}(x) = -4/5\ x + 2 \Rightarrow x_e = 2.5 \Rightarrow y_e = 1$
Im zweiten Fall erhält man:



$A_{oben}(n, h) = \sqrt{n^2 + \left(\frac{5}{2} n\right)^2} \cdot h$ und aufgrund der

Ähnlichkeit der Dreiecke die Beziehung $\frac{h}{2-n} = \frac{5}{\sqrt{29}}$

$\Rightarrow \quad A_{oben}(n) = 5n - \frac{5}{2} n^2 \quad \Rightarrow n_e = 1, \quad h_e = \frac{5}{\sqrt{29}} \ , \quad b_e = \frac{\sqrt{29}}{2}$

Erstaunlicher Weise sind beide Flächen gleich groß – es gibt zwei Lösungen.
Zielfunktion
Abmessungen des neuen Quaders: 2,5 dm x 1,0 dm x 5.0 dm oder 0,928 dm x 2,693 dm x 5 dm