Schriftliche Abiturprüfung – Grundkursfach – Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Aus rechtlichen Gründen möchte ich Sie darauf hinweisen, dass Sie sich auf einer **privaten** Seite befinden. Insbesondere ist dies **kein** Produkt des Sächsischen Staatsministeriums für Kultus, welches die Abituraufgaben entwickelt.

Dies ist die Abschrift der Aufgaben.

Außerdem sollten Sie folgendes wissen:

- Lösungen der Aufgaben können auf unterschiedlichen Wegen erreicht werden. Hier finden Sie VORSCHLÄGE zur Lösung und VORSCHLÄGE zur Bewertung, die nicht für die Bewertung Ihres Abiturs herangezogen werden können. Dafür ist jeder prüfende Fachlehrer verantwortlich.
- Ich habe versucht, den graphikfähigen Taschenrechner (GTR – hier TI 82/83/83+) besonders häufig einzusetzen. Damit sollen Möglichkeiten aufgezeigt werden, auch wenn eine Rechnung vielleicht schneller zum Ziel führen würde.
- Eingesetzte Programme finden Sie auf den Mathe-Seiten des sächsischen Schulservers unter www.sn.schule.de/~matheabi dokumentiert und anhand von vielen Beispielen erklärt. Insbesondere möchte ich auf eine zusammenfassende Broschüre zu diesem Thema verweisen: www.sn.schule.de/~matheabi/data/gtrZsfsg.pdf.
- Für Nachfragen und Ihre Hinweise stehe ich Ihnen gerne zur Verfügung: F. Müller (mathe@oskar-reime-gymnasium.de).
  Dieses Dokument wurde zuletzt aktualisiert am 03.04.05.
- Wenn Sie Fehler finden oder Ergänzungen haben, teilen Sie mir das bitte mit.

Material zur Vorbereitung der Abiturprüfungen 2005

Allgemeine Arbeitshinweise

Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionen) Hilfslinien muss deutlich erkennbar in gut lesbarer Form dargestellt werden.

Bei Verwendung von GTR-Programmen ist anzugeben, aus welchen Eingabedaten das Programm welche Ausgabendaten berechnet.

Insgesamt sind 60 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar, davon
im Teil A 25 BE,
im Teil B 15 BE,
im Teil C 10 BE,
im Teil D 10 BE.

Erlaubte Hilfsmittel:

1 Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung
grafikfähiger, programmierbarer Taschenrechner (GTR) ohne Computer-Algebra-System
Tabellen- und Formelsammlung ohne ausführliche Musterbeispiele (im Unterricht eingeführt)
Zeichengeräte
beiliegende „Materialien für Aufgaben zur Stochastik“[1]

Bewertungsmaßstab

Pkte.	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
60 BE	60-58	57-55	54-52	51-49	48-46	45-43	42-40	39-37	36-34	33-31	30-28	27-25	24-21	20-17	16-13	12-0

Prüfungsinhalt

Teil A: Analysis

Gegeben ist eine Funktion f durch $y = f(x) = -e^{-\frac{1}{4}x} \cdot (4+3x)$ $(x \in \mathbb{R})$.

a) Begründen Sie, dass die Funktion f genau eine Nullstelle besitzt.
Begründen Sie, dass der Graph der Funktion f keine senkrechte Asymptote hat und geben Sie eine Gleichung der waagerechten Asymptote an.
Der Graph der Funktion f besitzt genau einen lokalen Extrempunkt.
Zeigen Sie auch mithilfe der ersten Ableitungsfunktion von f, dass dieser die Koordinaten
$E\left(\frac{8}{3} \middle| -\frac{12}{\sqrt[3]{e^2}}\right)$ besitzt.
Geben Sie die Art des Extremums an.
Der Graph der Funktion f besitzt genau einen Wendepunkt.
Ermitteln Sie die Koordinaten dieses Wendepunktes. Erreichbare BE -Anzahl: 10

b) Geben Sie die Monotonieintervalle des Graphen der Funktion f und die jeweils zugehörige Art der Monotonie an.
Begründen Sie Ihre Entscheidungen. Erreichbare BE-Anzahl: 3

c) Die Gerade g verläuft durch den lokalen Extrempunkt des Graphen von f und den

1 Diese werden hier nicht wiedergegeben. Sie enthalten zumeist eine Tabelle zur Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Manchmal eine Tabelle zur Summenfunktion der Binomialverteilung. Beides kann durch Verwendung des GTR leicht ersetzt werden. Die Tabellen finden Sie im Inhalt der Online-Ausgabe dieses Textes www.sn.schule.de/~matheabi.

Koordinatenursprung.
Der Graph der Funktion f und die Gerade g schließen eine Fläche vollständig ein. Die x - Achse teilt diese Fläche in zwei Teilflächen.
Untersuchen Sie, ob sich die Inhalte der bei den Teilflächen wie 1: 3 verhalten.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

d) Es existieren Tangenten an den Graphen der Funktion f, die senkrecht zur Geraden h mit $y = h(x) = -e \cdot x$ verlaufen.
Ermitteln Sie eine Gleichung einer dieser Tangenten. Erreichbare BE-Anzahl: 3

e) Für jedes a ($a \in \mathbb{R}$, $a > 0$) schneidet der Graph der Funktion f_a mit
$y=f_a(x)=-e^{-\frac{1}{4}x}\cdot(a+3x)$ ($x \in \mathbb{R}$) den Graphen der Funktion w mit
$y=w(x)=-3x\cdot e^{-\frac{1}{4}x}-1$ ($x \in \mathbb{R}$) in genau einem Punkt P_a.
Ermitteln Sie einen Näherungswert für a, für den der Punkt Pa einen minimalen Abstand vom Koordinatenursprung besitzt. Erreichbare BE-Anzahl: 4

Teil B: Geometrie /Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem mit dem Koordinatenursprung O sind die Vektoren
$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\-2\\5\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\-2\\-10\end{pmatrix}$ und $\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\4\\-5\end{pmatrix}$ gegeben.

a) Nennen Sie drei Eigenschaften eines Vektors.
Weisen Sie nach, dass die Vektoren a und b in keiner dieser Vektoreigenschaften übereinstimmen.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

b) Zeigen Sie, dass der Vektor $\vec{c}$ nicht als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellbar ist. Erreichbare BE-Anzahl: 2

c) Gegeben sind die Koordinaten des Punktes S(1 | 1 | 5) sowie die Punkte A, B und C durch
$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OS}-\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OS}+\frac{1}{2}\vec{b}$ und $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OS}+\vec{c}$.
Begründen Sie, dass eine Begrenzungsfläche der Pyramide ABCS in der x-y-Koordinatenebene liegt.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

Für jedes a ($a \in \mathbb{R}$) sind die Punkte $S_a(1 \mid a \mid 4a^2 + 1)$, A(0 | 3 | 0), B(3 | 0 | 0) und C(2 | 5 | 0) Eckpunkte einer dreiseitigen Pyramide.

d) Berechnen Sie das Volumen dieser Pyramide in Abhängigkeit von a.
Bestimmen Sie alle Werte a so, dass das Volumen der Pyramide 20 beträgt.

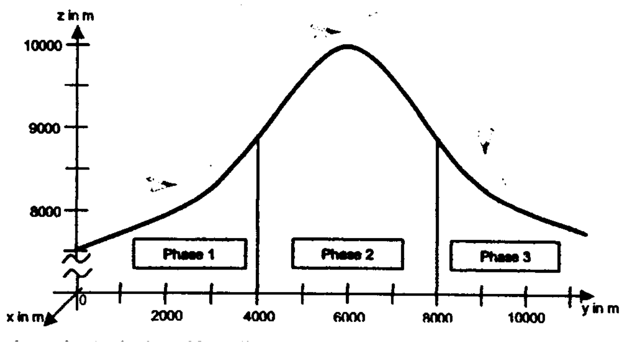
Erreichbare BE-Anzahl: 4

e) Untersuchen Sie, ob ein Wert a existiert, so dass der Punkt P(1/3 | 3 | 12) auf der Kante $\overline{AS_a}$ liegt. Erreichbare BE-Anzahl: 2

Wahlaufgabe 1

Mit einem umgebauten Airbus A 300 führt die europäische Luft- und Raumfahrtbehörde ESA sogenannte "Parabelf1üge" zur Simulation der Schwerelosigkeit durch.
Ein solcher Flug (siehe Abbildung) kann in drei Phasen unterteilt werden:
Phase 1: Steilflug von 7500 m auf 8700 m Höhe |
Phase 2: Airbus bewegt sich auf einer Parabel, Scheitelpunkt in einer Höhe von 10000 m |
Phase 3: Abfangen der Maschine.

In einem kartesischen Koordinatensystem (1 Einheit = 1 Meter) beschreiben die Koordinaten x, y und z die Flugkurve des A 300 im Raum.
Der Airbus wird vom Flugleitzentrum zu unterschiedlichen Zeitpunkten der Phase 2 in den folgenden Punkten geortet: $P_1(0 \mid 4000 \mid 8700)$, $P_2(0 \mid 6000 \mid 10000)$, $P_3(0 \mid 8000 \mid 8700)$



a) Die Phase 2 des Gesamtfluges soll mathematisch beschrieben werden.
Geben Sie eine Gleichung der Ebene an, in der sich die Parabelbahn des Airbusses befindet.
Geben Sie eine Gleichung der Flugparabel z(y) an. Erreichbare BE-Anzahl: 2

b) Geben Sie Bedingungen für den Graphen einer Funktion an, die die Flugbahn des Airbusses in Phase 3 beschreiben kann. Erreichbare BE-Anzahl: 2

Ein Beobachtungsf1ugzeug bewegt sich geradlinig in x - Richtung in einer konstanten Flughöhe von 8000 m senkrecht unter dem Scheitelpunkt der Flugbahn des Airbusses hindurch.

c) Geben Sie eine Gleichung für die Flugbahn des Beobachtungsflugzeuges an und begründen Sie.
Erreichbare BE-Anzahl: 3

d) Bestimmen Sie den minimalen Abstand der Flugbahnen des Beobachtungsf1ugzeuges und des Airbusses in der Phase 2. Erreichbare BE-Anzahl: 3

Wahlaufgabe 2:

Auf einem Abenteuerspielplatz ist die Attraktion ein 3 m hoher, gerader Kletterstamm. In einem kartesischen Koordinatensystem (1 Einheit ~ 1 Meter) befindet sich der Fuß des Stammes im Koordinatenursprung.
Der Kletterstamm befindet sich auf dem positiven Teil der z - Achse, der Spielplatz in der x-y-Koordinatenebene.
Im Laufe eines Tages „wandert" der Schatten des Kletterstammes über den Spielplatz.

a) Um 11.00 Uhr fällt das Sonnenlicht entlang der Richtung $\vec{r} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}$ auf den Spielplatz.

Berechnen Sie die Länge des Schattens des Kletterstammes zu diesem Zeitpunkt.
Erreichbare BE-Anzahl: 3

Die Spitze des Schattens des Kletterstammes beschreibt in einem begrenzten Zeitraum des Tages auf dem Spielplatz näherungsweise eine quadratische Parabel.
Um 12.00 Uhr befand sich die Schattenspitze im Punkt $A(0 \mid 3 \mid 0)$, um 13.30 Uhr im Punkt $B(3 \mid 4 \mid 0)$ und um 14.00 Uhr im Punkt $C(4 \mid 4{,}5 \mid 0)$.

b) Berechnen Sie die vom Schatten des Stammes in der Zeit von 12.00 bis 14.00 Uhr überstrichene Fläche. Erreichbare BE-Anzahl: 4

c) Ein geradliniger Balancierbalken verläuft zwischen den Punkten $D(2{,}5 \mid 1 \mid 1)$ und $E(0 \mid 4 \mid 1)$.
Untersuchen Sie, ob um 14.00 Uhr der Schatten des Kletterstammes den Balancierbalken trifft.
Erreichbare BE-Anzahl: 3

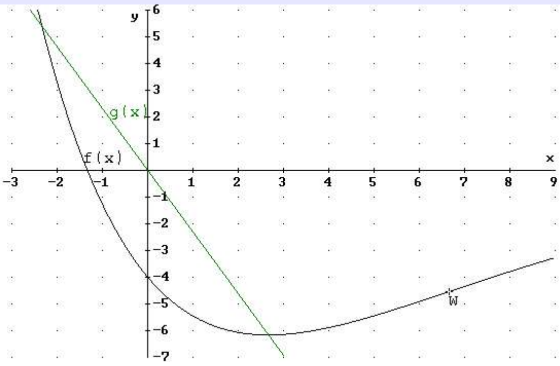
Lösungsvorschläge

Teil A

a) Begründung zur Nullstelle
Begründung zu senkrechter Asymptote: $\mathbf{D_f} = \mathbb{R}$
Gleichung der waagerechten Asymptote: y = 0
1. Ableitung (2 BE): $f'(x) = -e^{-\frac{1}{4}x} \cdot \left(\frac{3}{4}x - 2\right)$
Nachweis der Extremstelle: $f'(x_E) = 0$
Nachweis der Ordinate des Extrempunktes: $f(x_E) = \ldots$
Art des Extremums: $f''(x_E) \underset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}3851 > 0$ Tiefpunkt
z. B.: Y1=f(x) und [math] + <nDerive> `nDerive(nDerive(Y1,X,X),X,8/3)` → 0,3851
Ansatz zur Bestimmung der Abszisse des Wendepunktes: $f''(x_W) = 0$
Koordinaten des Wendepunktes: $W\left(\frac{20}{3}\middle| -\frac{24}{\sqrt[3]{e^5}}\right)$
GTR: `solve(Derive(nDerive(Y1,X,X),X,X),X,5)` → 20/3 10 BE

b) Angabe der Monotonieintervalle
Aussagen zu Monotoniearten: x < 8/3 streng monoton fallend; 8/3 ≤ x monoton steigend
Begründung 3 BE

c) Schnittstellen der Graphen von g und f:
S(-2,3367 | 5.3987)



Fläche zwischen den Graphen:
$$\int_{-2{,}3367}^{8/3} g(x) - f(x)\,dx \approx 13{,}2987$$
Fläche unter f(x) im II. Quadranten:
$$\int_{-2{,}3367}^{-4/3} f(x)\,dx \approx 2{,}4955$$
Fläche unter g(x) im II. Quadranten (Dreieck):
$A = \frac{1}{2} \cdot |x_S| \cdot g(x_S) = 6{,}3075$
Fläche F zwischen f(x) und g(x) im II. Quadranten: F = 6,3075 – 2,4955 ≈ 3,8120
Variante II: $F = \int_{-2{,}3367}^{0} g(x) - f(x)\,dx - \left|\int_{-4/3}^{0} f(x)\,dx\right| \approx 3{,}8120$
Überprüfe Teilverhältnis: 4 ·3,8120 ≈ 15,2482 ≠ 13,2987
Ansatz für Inhalt einer Teilfläche
Inhalt einer Teilfläche
Inhalt der zweiten Teilfläche
Aussage: Die Inhalte der beiden Teilflächen verhalten sich nicht wie 1:3. 5 BE

d) Ansatz für Abszissen der Berührungspunkte: $f'(x_B) = e^{-1}$
eine Abszisse eines Berührungspunktes: x = 4 oder x ≈ 11,62
eine Tangentengleichung: $y = e^{-1}(x - 20)$ oder $y = e^{-1}x - 6{,}4$ 3 BE

e) Ansatz zur Bestimmung der Abszisse von P_a: $y_a = w(x_a) = f_a(x_a)$
Koordinaten von P_a: $P_a\left(4 \cdot \ln a \middle| 1 + \frac{12}{a} \cdot \ln a\right)$
Ansatz für Abstand:
Abstand $d(a) = \sqrt{x_a^2 + y_a^2}$; es reicht das Minimum von $d^2(a) = x_a^2 + y_a^2$ zu finden

GTR: `fMin(d²(a),a,0,10)` → a = 0,9313
Wert a: a ≈ 0,93 4 BE

Teil B

a) Eigenschaften: Betrag, Richtung und Richtungssinn[2]
Aussagen zu den drei Vektoreigenschaften (3 BE)
wegen $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ haben die Vektoren gleiche Eigenschaften 4 BE

b) Ansatz für Nachweis
Nachweis 2 BE

c) Koordinaten eines Punktes
Koordinaten aller Punkte: A(0 | 3 | 0), B(3 | 0 | 0), C(2 | 5 | 0)
Aussage zur Lage der Begrenzungsfläche ΔABC 3 BE

d) Flächeninhalt einer Begrenzungsfläche: $F_{\Delta ABC} = 6$
Volumen der Pyramide in Abhängigkeit von a: $V(a) = 2 \cdot (4a^2 + 1)$
Ansatz für Werte a: V(a) = 20
Werte a: $a_{1/2} = \pm 1\frac{1}{2}$ 4 BE

e) Untersuchung und Aussage: Es existiert kein Wert a. (2 BE)
Kante: $k: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + u \cdot \overrightarrow{AS_a} \quad (u \in \mathbb{R}, 0 \le u \le 1)$;
das Gleichungssystem $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + u \cdot \overrightarrow{AS_a}$ führt auch ohne die Nebenbedingung für u zu einem Widerspruch 2 BE

Wahlaufgabe 1

a) Gleichung der Ebene: z.B. x = 0
Gleichung der Flugparabel: $z(y) = -3{,}25 \cdot 10^{-4}\, y^2 + 3{,}9\, y - 1700$ 2 BE

b) zwei Eigenschaften
z.B. Angabe zum Funktionswert an der Stelle y = 8000, Angabe zum Anstieg der Funktion an der Stelle y = 8000
oder
Aussage zum weiteren Verlauf des Graphen der Funktion (z.B. Zunahme des Anstiegs) 2 BE

c) Angabe einer Gleichung: z.B. $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6000 \\ 8000 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (t ∈ ℝ)
Begründung für den Stützvektor
Begründung für den Richtungsvektor 3 BE

d) Ansatz für minimalen Abstand:
Abstandsquadrat $d^2(y) = (y - 6000)^2 + (z(y) - 8000)^2$
mit Minimum bei y = 4808,312816 bzw. y = 7191,687183
Zielfunktion
minimaler Abstand: d ≈ 1946 m 3 BE

---

2 Die Unterscheidung zwischen Richtung und Richtungssinn finde ich nicht sinnvoll, denn der Begriff Richtungssinn ist nur in Bezug auf einen zweiten Vektor zu verwenden, z. B. „der entgegengesetzte Richtungssinn“, und ist somit nicht die Eigenschaft **eines** Vektors. Hat ein Vektor den entgegengesetzten Richtungssinn, hat er auch eine andere Richtung als der Vektor mit dem man ihn vergleicht.
Als dritte Eigenschaft könnte der Vektorraum, aus dem die Vektoren stammen, dienen. In diesem Fall hätten die Vektoren aber die gleiche Eigenschaft $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$. FM

Wahlaufgabe 2

a) Geradengleichung: $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-4\\7\\-6\end{pmatrix}$

Durchstoßpunkt mit der x-y-Koordinatenebene: $D_{xy}(-2 \mid 3{,}5 \mid 0)$ für t = ½

Länge des Schattens: l ≈ 4,03 m 3 BE

b) Gleichung der Parabel: $y=\mathrm{p}(x)=\frac{1}{24}x^2+\frac{5}{24}x+3$

Ansatz für Flächeninhalt (2 BE): $A=\int_0^4 \mathrm{p}(x)\,dx-\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4{,}5=\frac{50}{9}$

Flächeninhalt: A ≈ 5,6 m² 4 BE

c) eine Gleichung der Schattenlinie des Stammes in der x-y-Ebene oder eine Gleichung der Projektion des Balancierbalkens in die x-y-Ebene

Sonnenlicht aus Richtung $\vec{r}_{14}=\begin{pmatrix}4\\4{,}5\\-3\end{pmatrix}$

Schatten von D und E: $D_{14}(23/6 \mid 5/2 \mid 0)$ bzw. $E_{14}(4/3 \mid 11/2 \mid 0)$

$\overline{D_{14}E_{14}}\cap\overline{OC}:\ \overrightarrow{OD_{14}}+u\cdot\overrightarrow{DE}=v\cdot\overrightarrow{OC}$ hat Lösungen für u = 64/93 und v = 71/93;

wegen 0 ≤ u,v ≤ 1 schneiden die Kanten sich tatsächlich

Schlussfolgerungen zur Lagebeziehung von Kletterstammschatten und Balancierbalken: Der Schatten trifft den Balken. (2 BE) 3 BE