Sächsisches Staatsministerium
für Kultus

Schuljahr **2004/05**

Geltungsbereich:
- Allgemein bildendes Gymnasium
- Abendgymnasium und Kolleg
- Schulfremde Prüfungsteilnehmer

Schriftliche Abiturprüfung
Leistungskursfach Mathematik

- E R S T T E R M I N -

Material für den Prüfungsteilnehmer

Allgemeine Arbeitshinweise

Ihre Arbeitszeit (einschließlich der Zeit für das Lesen der Aufgabentexte und der Zeit für die Auswahl der Wahlaufgabe) beträgt **300 Minuten.**

Auf dem Deckblatt der Arbeit haben Sie den verwendeten GTR-Typ anzugeben.

Die Prüfungsarbeit besteht aus den zu bearbeitenden **Pflichtteilen A**, **B** und **C** sowie dem **Wahlteil D**.
Es sind alle Aufgaben der Pflichtteile zu bearbeiten.
Aus dem Teil D ist **genau eine** der beiden Wahlaufgaben zu bearbeiten.

Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionen) Hilfslinien muss deutlich erkennbar in gut lesbarer Form dargestellt werden.

Insgesamt sind 90 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar, davon

im Teil A	35 BE,
im Teil B	25 BE,
im Teil C	15 BE,
im Teil D	15 BE.

Erlaubte Hilfsmittel:
- Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung
- Taschenrechner ohne Computer-Algebra-System
- Tabellen- und Formelsammlung (im Unterricht eingeführt, ohne ausführliche Musterbeispiele)
- Zeichengeräte
- Beiliegende “Materialien für Aufgaben zur Stochastik”

Prüfungsinhalt

Pflichtaufgaben

Teil A: Analysis

Für jedes k $(k \in R; k > 0)$ ist eine Funktion f_k durch $f_k(x) = \left(\frac{1}{2}x - k\right) \cdot e^{\frac{1}{k} \cdot x}$ $(x \in R)$

und deren zweite Ableitungsfunktion f_k'' durch $f_k''(x) = \frac{x}{2k^2} \cdot e^{\frac{1}{k} \cdot x}$ $(x \in R)$ gegeben.

a) Geben Sie die Nullstelle der Funktion f_2, die Koordinaten des lokalen Extrempunktes und die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen der Funktion f_2 an.

Der Graph der Funktion f_2 und die Koordinatenachsen begrenzen eine Fläche vollständig. Durch Rotation dieser Fläche um die Abszissenachse entsteht ein Körper.

Ermitteln Sie einen Näherungswert für das Volumen dieses Körpers.

Erreichbare BE-Anzahl: 6

b) Der Graph jeder Funktion f_k besitzt genau einen lokalen Extrempunkt. Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion g, auf deren Graph die lokalen Extrempunkte aller Funktionen f_k liegen.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

c) Ermitteln Sie alle Werte k, für die sich die Graphen der Funktion f_k und der Ableitungsfunktion f_k' nicht schneiden.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

d) Zeigen Sie durch Integration, dass die Funktion F_k mit der Gleichung

$F_k(x) = \frac{k}{2} \cdot (x - 3k) \cdot e^{\frac{1}{k}x}$ $(x \in R)$ eine Stammfunktion der Funktion f_k ist.

Der Graph der Funktion f_k und die Koordinatenachsen begrenzen eine Fläche vollständig.

Berechnen Sie ohne Verwendung von Näherungswerten den Wert k, für den der Inhalt dieser Fläche $\frac{2}{9} \cdot \left(e^2 - 3\right)$ beträgt.

Erreichbare BE-Anzahl: 8

Fortsetzung Seite 3

Fortsetzung Teil A: Analysis

Der Graph jeder Funktion f_k besitzt genau einen Wendepunkt W_k.
Die Wendetangente sei t_k. Die Senkrechte zur Wendetangente im Punkt W_k sei s_k .

e) Begründen Sie, dass alle Tangenten t_k parallel zueinander verlaufen.

Die Geraden t_k und s_k sowie die Abszissenachse begrenzen eine Dreiecksfläche vollständig.

Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

Erreichbare BE-Anzahl: 9

f) Der Graph der Funktion f_2 hat den lokalen Extrempunkt P_{E_2} .

Geben Sie eine Gleichung einer trigonometrischen Funktion an, deren Graph den Graphen der Funktion f_2 im Punkt P_{E_2} berührt.

Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

Teil B: Geometrie/Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(-2; 0; 2)$, $B(2; 1; 4)$, $P(-2; -4; 4)$ und $D(-2; -4\sqrt{2}; 2+2\sqrt{2})$ gegeben.
Die Strecke $\overline{AB}$ ist die Höhe eines geraden Kreiskegels. Sein Grundkreis k um den Punkt A mit dem Radius $\sqrt{20}$ liegt in der Ebene E.

a) Begründen Sie, dass $4x + y + 2z = -4$ eine Gleichung der Ebene E ist.

Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Punkt D in der Ebene E liegt.

Berechnen Sie den Abstand des Punktes D vom Grundkreis k.

Erreichbare BE-Anzahl: 6

b) Weisen Sie nach, dass der Punkt P auf dem Grundkreis k liegt.

Ermitteln Sie einen Näherungswert für den Öffnungswinkel dieses Kreiskegels an der Spitze B.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

c) Beschreiben Sie eine Möglichkeit, um die Koordinaten eines von P verschiedenen Punktes zu ermitteln, der auf dem Grundkreis k liegt.

Ermitteln Sie die Koordinaten eines solchen Punktes.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

d) Für jedes a ($a \in \mathbb{R}$) ist ein Punkt $C_a(-a; 8-2a; -6+3a)$ gegeben.

Ermitteln Sie alle Werte a, für die der Punkt C_a innerhalb des Grundkreises k liegt.

Geben Sie die Koordinaten desjenigen Punktes C_a an, der vom Grundkreismittelpunkt den kleinstmöglichen Abstand hat.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

e) Es gibt genau eine zur Grundkreisebene E parallele Ebene E_1, die das Volumen des Kreiskegels halbiert.

Weisen Sie nach, dass die Ebene E_1 vom Punkt B einen Abstand von $\frac{\sqrt{21}}{\sqrt[3]{2}}$ haben muss.

Ermitteln Sie eine parameterfreie Gleichung der Ebene E_1.

Erreichbare BE-Anzahl: 6

Teil C: Stochastik

Bei der maschinellen Herstellung von Wurfpfeilen (Darts) in einer Firma sind 95% aller Pfeile fehlerfrei. Fehler treten nur als Material- oder Montagefehler auf. Am Ende des Produktionsprozesses werden die Wurfpfeile zufällig in Sets zu je drei Pfeilen verpackt.

a) Der laufenden Produktion werden zufällig 60 Wurfpfeile entnommen.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

Ereignis A: Von den entnommenen Wurfpfeilen sind mindestens 50, aber höchstens 55 fehlerfrei.
Ereignis B: Von den entnommenen Wurfpfeilen sind mehr fehlerfrei, als man erwarten kann.

Wie viele Wurfpfeile müssen der laufenden Produktion entnommen werden, damit darunter genau 6 fehlerhafte Wurfpfeile zu erwarten sind?

Erreichbare BE-Anzahl: 5

b) Berechnen Sie, wie viele Sets ein Kontrolleur mindestens der Produktion entnehmen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 98% mindestens ein Set mit mindestens einem fehlerhaften Wurfpfeil zu erhalten.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

c) Bei der Produktion treten Materialfehler mit einer Wahrscheinlichkeit von 4% und Montagefehler mit einer Wahrscheinlichkeit von 2% auf.

Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Wurfpfeil Material- und Montagefehler besitzt, 1% beträgt.

Weisen Sie nach, dass die beiden Fehlerarten stochastisch abhängig sind.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Wurfpfeil mit Materialfehler auch Montagefehler besitzt.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

Die Masse der von der Firma hergestellten Wurfpfeile sei normalverteilt mit $\mu = 18\,\text{g}$ und $\sigma = 0{,}5\,\text{g}$. Bei offiziellen Wettbewerben darf die Masse eines Wurfpfeils $18{,}9\,\text{g}$ nicht überschreiten.

d) Ermitteln Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein zufällig ausgewählter Wurfpfeil der Firma bei diesen Wettbewerben nicht verwendet werden darf.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

Teil D: Wahlaufgaben

Wählen Sie genau eine der folgenden Aufgaben zur Bearbeitung aus.

Wahlaufgabe 1

Ein Gleisplan einer ebenen Modellbahnanlage wird auf der Grundlage eines kartesischen Koordinatensystems erstellt. Eine Längeneinheit entspricht einem Dezimeter.

Die beiden geradlinig verlaufenden Gleisabschnitte zwischen den Punkten A(-10; 0) und B(0; 0) sowie zwischen den Punkten C(7; 7) und D(14; 11) sind bereits festgelegt. Zwischen den Punkten B und C soll ein Übergangsbogen so eingepasst werden, dass jeder Übergang zwischen den Schienenstücken ohne Knick erfolgt.
Die Lage der Schienen wird vereinfacht durch ihre Mittellinie bestimmt.

a) Tim schlägt vor, die Lage dieses Übergangsbogens durch den Graphen einer ganzrationalen Funktion zu ermitteln.

Begründen Sie, dass eine ganzrationale Funktion dritten Grades dazu geeignet ist.
Bestimmen Sie eine Gleichung einer solchen Funktion.

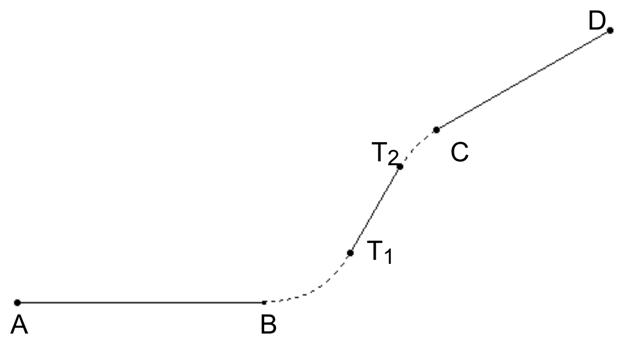
Zeigen Sie, dass auch die Funktion p mit $p(x) = -\frac{17}{2401}x^4 + \frac{24}{343}x^3$ $(x \in \mathbb{R};\ 0 \le x \le 7)$ die Bedingungen für einen solchen Übergangsbogen erfüllt.

Die Länge eines Kurvenstückes des Graphen einer Funktion f bezeichnet man als Bogenlänge L_f. Die Maßzahl von L_f kann im Intervall $a \le x \le b$ mit der Formel $L_f = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$ berechnet werden.

Ermitteln Sie einen Näherungswert für die Maßzahl der Bogenlänge L_p des Graphen der Funktion p zwischen den Punkten B und C.

Erreichbare BE-Anzahl: 9

b) Tom möchte den Übergangsbogen durch zwei kreisförmige Schienenstücke mit einem Radius von je $\frac{1}{2}\sqrt{65}$ dm und einem eingeschlossenen geradlinigen Schienenstück herstellen.
Die nebenstehende Skizze zeigt einen Ausschnitt aus einem Gleisplan.



(Skizze nicht maßstäblich)

Das eingeschlossene geradlinige Schienenstück verläuft zwischen den Punkten T_1 und T_2. Der Punkt T_1 ist durch die Näherungswerte seiner Koordinaten $T_1(3{,}5;\ 2{,}0)$ gegeben.

Ermitteln Sie Näherungswerte für die Koordinaten des Punktes T_2.

Erreichbare BE-Anzahl: 6

Wahlaufgabe 2

Die Lage eines alten Abwasserkanals kann bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems in einem bestimmten Abschnitt näherungsweise als Teil einer Geraden mit der

Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (r \in R)$ beschrieben werden.

Eine Längeneinheit entspricht einem Meter.

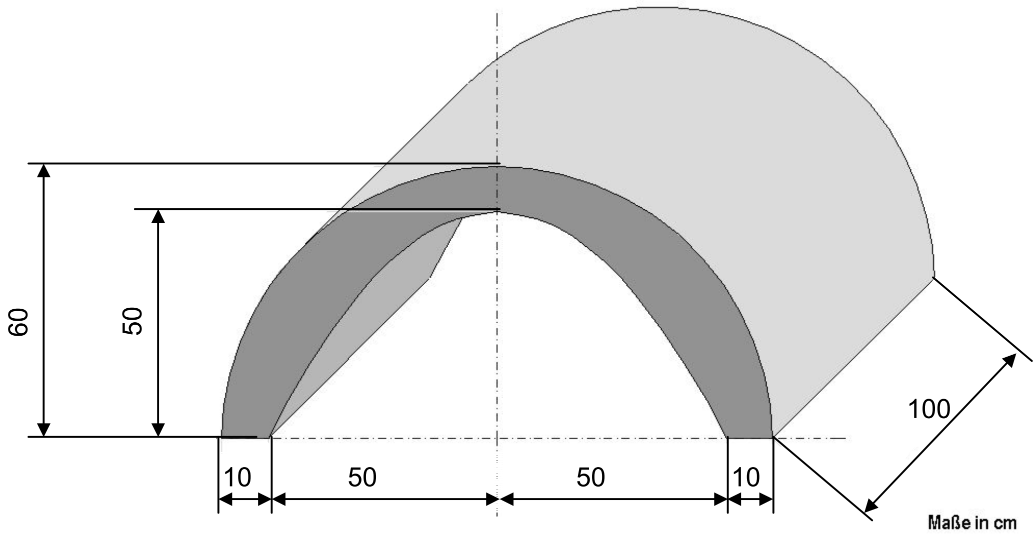
Ein neuer Kanal muss aus bautechnischen Gründen parallel zum alten Kanal in einem Abstand von $7\,\text{m}$ verlaufen. Der neue Kanal soll in einer Ebene E mit der Gleichung $18x + 5y - 22z = 75$ liegen.

a) Zeigen Sie, dass auch der alte Kanal in der Ebene E liegt.

Ermitteln Sie eine Gleichung einer Geraden, die eine mögliche Lage des neuen Kanals beschreibt.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

Für den Bau des neuen Kanals werden Fertigelemente verwendet. Sie besitzen eine konstante Querschnittsfläche, die durch einen Halbkreis (außen), durch einen parabelförmigen Bogen (innen) sowie zwei Strecken begrenzt werden (siehe Abbildung).



Ein solches Fertigelement hat eine Länge von $1\,\text{m}$ und besteht aus Beton mit der Dichte $\rho = 2{,}3\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.

b) Ermitteln Sie die Masse eines Fertigelementes in Kilogramm.

Erreichbare BE-Anzahl: 6

c) Das Fertigelement soll senkrecht zum Halbkreis der Querschnittsfläche an einer Stelle durchbohrt werden, wo die Wandstärke am größten ist.
Ermitteln Sie diese maximale Wandstärke.

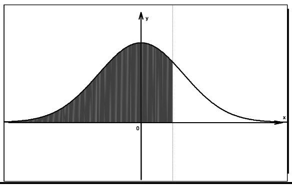
Erreichbare BE-Anzahl: 4

Materialien für Aufgaben zur Stochastik

Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$$

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$$



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000