Schriftliche Abiturprüfung – Grundkursfach – Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Aus rechtlichen Gründen möchte ich Sie darauf hinweisen, dass Sie sich auf einer **privaten** Seite befinden. Insbesondere ist dies **kein** Produkt des Sächsischen Staatsministeriums für Kultus, welches die Abituraufgaben entwickelt.

Dies ist die Abschrift der Prüfungsaufgaben 2006, wie sie vom Sächsischen Staatsministeriums für Kultus auf dem Sächsischen Schulserver (www.sachsen-macht-schule.de) veröffentlicht wurden.

Außerdem sollten Sie folgendes wissen:

- Lösungen der Aufgaben können auf unterschiedlichen Wegen erreicht werden. Hier finden Sie VORSCHLÄGE zur Lösung und VORSCHLÄGE zur Bewertung, die nicht für die Bewertung Ihres Abiturs herangezogen werden können. Dafür ist jeder prüfende Fachlehrer verantwortlich.
- Ich habe versucht, den graphikfähigen Taschenrechner (GTR – hier TI 82/83/83+) besonders häufig einzusetzen. Damit sollen Möglichkeiten aufgezeigt werden, auch wenn eine Rechnung vielleicht schneller zum Ziel führen würde.
- Eingesetzte Programme finden Sie auf den Mathe-Seiten des sächsischen Schulservers unter www.sn.schule.de/~matheabi dokumentiert und anhand von vielen Beispielen erklärt. Insbesondere möchte ich auf eine zusammenfassende Broschüre zu diesem Thema verweisen: www.sn.schule.de/~matheabi/data/gtrZsfsg.pdf.
- Die **offiziellen** Abituraufgaben werden nach Beendigung der Prüfungsphase auf dem Sächsischen Schulserver veröffentlicht.
- Für Nachfragen und Ihre Hinweise stehe ich Ihnen gerne zur Verfügung: F. Müller (mathe@oskar-reime-gymnasium.de) – Mathe-Lehrer.
  Dieses Dokument wurde zuletzt aktualisiert am 14.07.06.
- Wenn Sie Fehler finden oder Ergänzungen haben, teilen Sie mir das bitte mit.

Material für den Prüfungsteilnehmer

Allgemeine Arbeitshinweise

Ihre Arbeitszeit (einschließlich der Zeit für das Lesen der Aufgabentexte und der Zeit für die Auswahl der Wahlaufgabe) beträgt 240 **Minuten.**

Auf dem Deckblatt der Arbeit haben Sie den verwendeten GTR-Typ anzugeben.

Die Prüfungsarbeit besteht aus den zu bearbeitenden Pflichtteilen **A, B** und **C** sowie dem **Wahlteil D.**
Es sind alle Aufgaben der Pflichtteile zu bearbeiten.
Aus dem Teil D ist **genau eine** der beiden Aufgaben zu bearbeiten.
Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionen) Hilfslinien muss deutlich erkennbar in gut lesbarer Form dargestellt werden.

Bei Verwendung von GTR-Programmen ist anzugeben, aus welchen Eingabedaten das Programm welche Ausgabendaten berechnet.

Insgesamt sind 60 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar, davon
im Teil A 25 BE,
im Teil B 15 BE,
im Teil C 10 BE,
im Teil D 10 BE.

Erlaubte Hilfsmittel:

1 Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung
1 grafikfähiger, programmierbarer Taschenrechner (GTR) ohne Computer-Algebra-System
1 Tabellen- und Formelsammlung ohne ausführliche Musterbeispiele (im Unterricht eingeführt)
Zeichengeräte

Bewertungsmaßstab

Pkte.	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
60 BE	60-58	57-55	54-52	51-49	48-46	45-43	42-40	39-37	36-34	33-31	30-28	27-25	24-21	20-17	16-13	12-0

Prüfungsinhalt

Pflichtaufgaben

Teil A: Analysis

Gegeben ist eine Funktion f durch $y = f(x) = \dfrac{3x}{2x^2+1}$ $(x \in D_f)$.

a) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion f an.
Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten des Graphen der Funktion f und geben Sie das Verhalten der Funktion f im Unendlichen an.
Geben Sie Näherungswerte für die Koordinaten der beiden lokalen Extrempunkte sowie deren Art und Näherungswerte für die Koordinaten der drei Wendepunkte des Graphen der Funktion f an.
Erreichbare BE-Anzahl: 7

b) Die Tangente t an den Graphen der Funktion f im Punkt $S(\frac{1}{2} \mid f(\frac{1}{2}))$ und der Graph von f begrenzen eine Fläche vollständig.
Ermitteln Sie einen Näherungswert für den Inhalt dieser Fläche.
Erreichbare BE-Anzahl: 4

c) Für jedes u ($u \in \mathbb{R}$; $u > 0$) sind die Punkte A(0 | 0), B(3 | 0) und C_u(u | f(u)) Eckpunkte eines Dreiecks. Die x-Koordinate des lokalen Maximumpunktes des Graphen der Funktion f ist x_{MAX}.
Begründen Sie, dass der Flächeninhalt des Dreiecks ABC_u für $u = x_{MAX}$ maximal wird.
Berechnen Sie alle Werte u, für die das Dreieck ABC_u den Flächeninhalt 1 besitzt.
Erreichbare BE-Anzahl: 5

d) Zeigen Sie, dass die Funktion F mit $F(x) = \frac{3}{4} \ln(2x^2 + 1)$ ($x \in \mathbb{R}$) eine Stammfunktion von f ist.
Der Graph der Funktion f, die x-Achse und die Gerade x = 2 begrenzen eine Fläche vollständig.
Weisen Sie nach, dass die Gerade x = 1 den Inhalt dieser Fläche halbiert.
Erreichbare BE-Anzahl: 5

e) Für jedes a ($a \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$) ist eine Funktion g_a durch $g_a(x) = a\, f(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) gegeben.
Ermitteln Sie den Wert a, für den die Tangente an den Graphen der Funktion g_a an der Stelle x = 1 parallel zur Geraden y = x + 2 verläuft.
Erreichbare BE-Anzahl: 4

Teil B: Geometrie /Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(5 | -1 | 0), B(5 | 6 | 0), C(4 | 5 | 3), D(4 | 0 | 3) und P(-5 | 7 | 0) gegeben. Die PunkteA, B, C und D liegen in ein und derselben Ebene.

a) Weisen Sie nach, dass das Viereck ABCD ein gleichschenkliges Trapez ist.
Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Trapezes.
Auf der Seite AB des Trapezes ABCD existiert genau ein Punkt F so, dass das Viereck AFCD ein Parallelogramm ist.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes F. Erreichbare BE-Anzahl: 7

b) Auf der Geraden durch die Punkte A und D existiert genau ein Punkt Q so, dass das Dreieck ABQ gleichschenklig mit der Basis AB ist.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes Q.
Geben Sie einen Näherungswert für die Größe des Basiswinkels a des Dreiecks ABQ an.
Erreichbare BE-Anzahl: 4

c) Jemand soll die Koordinaten eines auf der Geraden g durch die Punkte Bund P liegenden Punktes R ermitteln, der vom Punkt B den Abstand $2\sqrt{101}$ hat.
Er schlägt folgende Lösungsschritte vor:

(1) Ermitteln des Vektors $\vec{BP} = \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(2) Ermitteln des zum Vektor $\vec{BP}$ gehörenden Einheitsvektors $\vec{BP}_0 = \frac{1}{\sqrt{101}} \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(3) Verlängern des Vektors $\vec{BP}_0$ um den Faktor $2\sqrt{101}$.

(4) Der so erhaltene Vektor $\begin{pmatrix} -20 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist der Ortsvektor des gesuchten Punktes R.

Treffen Sie für jeden der Lösungsschritte eine begründete Aussage über seine Richtigkeit und korrigieren Sie gegebenenfalls falsche Schritte. Erreichbare BE-Anzahl: 4

Teil C: Stochastik

Das Fahrradfachgeschäft "Flotte Speiche" führt in seinem Angebot ausschließlich die Radtypen Citybike, Mountainbike, Trekkingbike und Rennrad. Aus Erfahrung weiß der Besitzer, dass sich unter den Kaufinteressenten 40% über ein Citybike, 35% über ein

Mountainbike, 2% über ein Rennrad und die restlichen über ein Trekkingbike informieren. Dabei informiert sich jeder Interessent nur über genau einen Fahrradtyp.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
   A: Von zwei aufeinanderfolgenden Interessenten informiert sich der erste über ein Mountainbike und der zweite über ein Citybike.
   B: Von 20 Interessenten informieren sich mindestens 8 über ein Citybike.
   C: Von aufeinanderfolgenden Interessenten informiert sich erstmals der siebente über ein Trekkingbike. Erreichbare BE-Anzahl: 4

b) Berechnen Sie, wie viele Kaufinteressenten sich mindestens informieren müssen, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich wenigstens eine Person über ein Rennrad informiert, mehr als 90% beträgt. Erreichbare BE-Anzahl: 2

c) Jeder zweite Interessent kauft - unabhängig vom Fahrradtyp - dann auch bei dem Fahrradfachhändler den Fahrradtyp, über den er sich informiert hat. Dabei gelten bei diesem Händler folgende durchschnittliche Preise:

Citybike	300,00 €
Mountainbike	350,00 €
Trekkingbike	400,00 €
Rennrad	1000,00 €

   Ermitteln Sie, welche Einnahme je Interessent der Händler erwarten kann. Durch Erhöhung des durchschnittlichen Preises für ein Citybike möchte der Händler die Einnahme je Interessent um 4% steigern.
   Bestimmen Sie den erhöhten durchschnittlichen Preis für ein Citybike. Erreichbare BE-Anzahl: 4

Teil D: Wahlaufgaben

Wählen Sie genau eine der folgenden Aufgaben zur Bearbeitung aus.

Wahlaufgabe 1

Von einem rechteckigen Spiegel ist ein Stück abgebrochen. Die Bruchlinie kann in einem gedachten kartesischen Koordinatensystem näherungsweise durch eine quadratische Parabel, die in einem Eckpunkt des Rechtecks ihren Scheitelpunkt hat, beschrieben werden (Maße siehe Skizze).

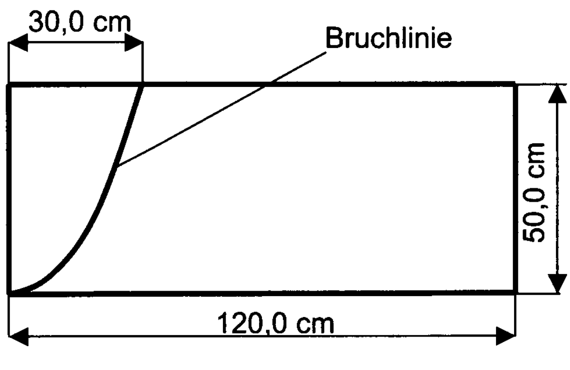


Abbildung 1: Skizze (nicht maßstäblich)

a) Ermitteln Sie einen Näherungswert für den prozentualen Anteil des Flächeninhalts des kleineren Bruchstücks vom Flächeninhalt des ursprünglichen Spiegels. Erreichbare BE-Anzahl: 4

b) Aus dem kleineren der beiden Bruchstücke soll ein rechteckiger Spiegel mit möglichst großem Flächeninhalt hergestellt werden.
   Ermitteln Sie Näherungswerte für die Abmessungen dieses Spiegels. Erreichbare BE-Anzahl: 3

c) Aus dem großen Bruchstück soll ein trapezförmiger Spiegel mit möglichst großem Flächeninhalt hergestellt werden.
   Ermitteln Sie einen Näherungswert für diesen größtmöglichen Flächeninhalt.
   Erreichbare BE-Anzahl: 3

Wahlaufgabe 2

Die Deutsche Lebensrettungsgesellschaft führt eine Übung durch. Dazu soll ein Rettungsschwimmer vom Fuß eines Beobachtungsturms am Strand geradlinig zum Ufer rennen und anschließend wiederum geradlinig zu einer Boje, die einen Verunglückten simulieren soll, schwimmen.

In einem gedachten kartesischen Koordinatensystem (1 Einheit entspricht 1 Meter) steht der Fußpunkt des Beobachtungsturms im Koordinatenursprung. Die Boje befindet sich im Punkt $B(60 \mid 295)$.

Die im interessierenden Abschnitt annähernd geradlinig verlaufende Uferlinie kann durch die Gerade g durch die Punkte $P_1(0 \mid 64)$ und $P_2(195 \mid 220)$ beschrieben werden.

Die als konstant angenommenen Geschwindigkeiten des Rettungsschwimmers

betragen am Strand 6,4 m/s und im Wasser 1,6 m/s.

a) Im Vorfeld der Übung diskutieren die Rettungschwimmer unterschiedliche Rettungsstrategien.
Strategie I: Wahl des kürzesten Weges zwischen Beobachtungsturm und Boje
Strategie 11: Lauf zu dem Punkt der Uferlinie, der zur Boje die kürzeste Entfernung besitzt und anschließendes Schwimmen zur Boje
Ermitteln Sie für beide Strategien Näherungswerte für die benötigte Zeit. Erreichbare BE-Anzahl: 6

b) Ziel des Einsatzes ist es, in kürzester Zeit zur Boje zu gelangen.
Ermitteln Sie einen Näherungswert für diese Zeit sowie Näherungswerte für die Koordinaten des Punktes der Uferlinie, in dem der Rettungsschwimmer ins Wasser müsste. Erreichbare BE-Anzahl: 4

Lösungsvorschläge

Teil A

a) größtmöglicher Definitionsbereich: $D_f = \mathbb{R}$
Symmetrieuntersuchung: f(-x) = -f(x)
Aussage zur Symmetrie: Punktsymmetrie
Verhalten im Unendlichen: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$
Koordinaten und Art der lokalen Extrempunkte: $P_{max}(0{,}71 \mid 1{,}06)$, $P_{min}(-0{,}71 \mid -1{,}06)$
Wendestellen
Koordinaten der Wendepunkte: $P_{W1}(-1{,}22 \mid -0{,}92)$, $P_{W1}(0 \mid 0)$, $P_{W3}(1{,}22 \mid 0{,}92)$

b) Ansatz für Gleichung der Tangente: $y = f'(½)x + f(½) - f'(½) \cdot ½$
Gleichung der Tangente: $t(x) = y = \frac{2}{3} \cdot (x+1)$
Ansatz für Flächeninhalt: $A = \int_{-2}^{\frac{1}{2}} t(x) - f(x)\,dx$
Flächeninhalt: A ≈ 1,76 4 BE

c) Begründung (2 BE): der Flächeninhalt hängt von der Grundseite und der Höhe ab. Die Grundseite bleibt immer gleich lang, also ist bei maximaler Höhe der größte Flächeninhalt erreicht. Die maximale Höhe ist $f(x_{max})$
Flächeninhalt in Abhängigkeit von u: A(u) = ½ ·3 ·f(u)
Ansatz für Werte u: A(u)=1
Werte u: $u_1 = ¼$; $u_2 = 2$ 5 BE

d) Nachweis für Stammfunktion (2 BE): F'(x) = f(x) mit Kettenregel
Flächeninhalt: $\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{3}{2} \ln(3)$
Nachweis (2 BE): $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{3}{4} \ln(3)$ folglich trifft die Aussage zu 5 BE

e) allgemeiner Ansatz: a ·f'(1) = 1
Variante I: GTR mit Y1 = f(x)
`solve(nDerive(A*Y1(X),X,1)-1,A,-2)` → -3
Variante II:
Ansatz für erste Ableitung: nach Faktorregel gilt $g_a'(x) = a \cdot f'(x)$
erste Ableitung
Ansatz für Wert a: siehe allgemeiner Ansatz
Wert a: a = -3 4 BE

Teil B

a) Nachweis für Trapez (2 BE): $\overline{AB} \| \overline{CD}$ wegen $\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{7}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$
Nachweis für Gleichschenkligkeit: $|\vec{AD}| = |\vec{BC}| = \sqrt{11}$
Ansatz für Flächeninhalt: z. B. $A = F_{\Delta ABD} + F_{\Delta CBD}$ und weiter mit GTR: prgmGEOMETRI | Dreieck oder Abstandsberechnung D und g_{AB} mit GTR: prgmGEOMETRI
Flächeninhalt: $A = 6 \cdot \sqrt{10}$

Ansatz für Koordinaten des Punktes F: $\vec{AF}=\vec{DC}$ bzw.: $\vec{OF}=\vec{OA}-\vec{DC}$
Koordinaten des Punktes F: F(5 | 4 | 0) 7 BE

a) eine Gleichung der Geraden durch die Punkte A und D: g_{AD}: $\vec{x}=\vec{OA}+\lambda\cdot\vec{AD}$ $(\lambda\in\mathbb{R})$
Ansatz für Koordinaten des Punktes Q:
Variante I
I: $Q\in g_{AD}$
II: $|\vec{AQ}|=|\vec{BQ}|$ oder $\vec{AQ}^2=\vec{BQ}^2$
führt zu
I*: $\vec{OQ}=\vec{OA}+\lambda_Q\cdot\vec{AD}$
I* in II: $\lambda_Q^2\vec{AD}^2=\left(\vec{AB}+\lambda_Q\vec{AD}\right)^2$
und $11\lambda_Q^2=11\lambda_Q^2-14\cdot\lambda_Q+49 \Rightarrow \lambda_Q=\frac{7}{2}$ und mit $\vec{OQ}=\vec{OA}+\frac{7}{2}\cdot\vec{AD}$
Variante II: weil das Trapez gleichschenklig ist, gilt: $Q=g_{AD}\cap g_{BC}$
weiter mit GTR: prgmGeometri | Schnittpunkte | Gerade-Gerade und Eingabe der Punkte
Koordinaten des Punktes Q: $Q\left(\frac{3}{2}\middle|\frac{5}{2}\middle|\frac{21}{2}\right)$
Größe des Basiswinkels α: α ≈ 72,5° 4 BE

b) begründete Aussage zur Richtigkeit eines der Lösungsschritte (1) bis (3)
begründete Aussage zur Richtigkeit aller Lösungsschritte (1) bis (3)
begründete Aussage zur Falschheit des Lösungsschrittes (4)
Korrektur des Lösungsschrittes (4):
z. B. $\vec{OR}=\vec{OB}\pm2\sqrt{101}\cdot\vec{BP}_0$ ergibt R_1(-15 | 8 | 0) oder R_2(25 | 4 | 0) 4 BE

Teil C

a) Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A: P(A) = .1400
Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B: P(B) ≈ .5841
Wahrscheinlichkeit für einen Trekkingbike-Interessenten
Wahrscheinlichkeit des Ereignisses C: P(C) = $\overline{p_{Trekking}}^6\cdot p_{Trekking}$ ≈ .0479 4 BE

b) Ansatz für Anzahl: z. B.: $1-(1-p_{Rennrad})^n > 90\%$
Anzahl: 114 Interessenten 2 BE

c) Wahrscheinlichkeiten für Kauf der jeweiligen Fahrradtypen: $p^*_{Radtyp}=\frac{1}{2}p_{Radtyp}$
Erwartungswert: E = 177,25 €
Ansatz für erhöhten Preis: $p^*_{Citybike}$ * Aufschlag = 4% von E
erhöhter Preis für ein Citybike: 335,45 € 4 BE

Teil W1

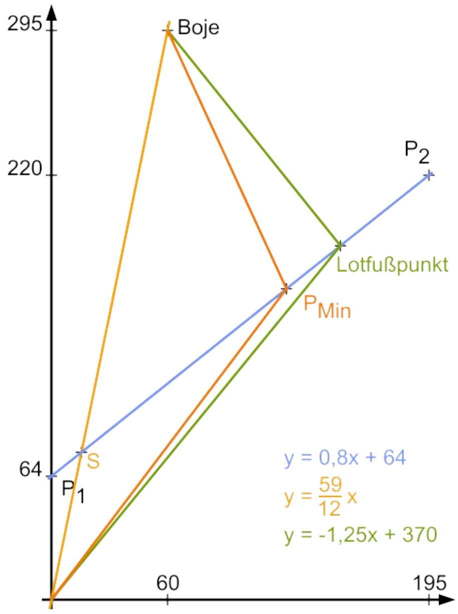
a) Ansatz für Gleichung der Parabel:
y = ax² (wegen Symmetrie und Parabel durch Koordinatenursprung) mit P(30 | 50)
Gleichung der Parabel: $y=f(x)=\frac{1}{18}x^2$
Flächeninhalt des kleineren Bruchstücks: $A=30\cdot50-\int_0^{30}f(x)\,dx=1000$
prozentualer Anteil: p ≈ 16,7% 4 BE

b) Ansatz für Zielfunktion: $A(u)=u\cdot(50-f(u))$
GTR: `fMax(X(50-X^2/18),X,0,30)` → 17.32

Zielfunktion
Maße des Spiegels: 17,3 cm x 33,3 cm 3 BE

c) Der Flächeninhalt des Trapezes hängt von der Höhe und von der Länge der Mittellinie ab. Da die Höhe gleich bleibt, muss die Mittellinie m maximal werden. Die Tangente ist also in der Höhe y = 25 cm anzulegen. Der dazu passende x-Wert ist 21,21 cm und der Flächeninhalt $F_{Trapez} = m \cdot h = (120 - 21{,}21) \cdot 50 \approx 4939\ cm^2$.
Ansatz einer Gleichung der Tangente in einem beliebigen Punkt der Bruchlinie
Zielfunktion
größtmöglicher Flächeninhalt: A ≈ 4 940 cm² 3 BE

Teil W2



a) Schnittpunkt zwischen Uferlinie und Wegelinie: mit GTR
S(15.54 | 76.44)
Ansatz für Zeit: $t = \frac{\overline{OS}}{6{,}4} + \frac{\overline{SB}}{1{,}6}$
Zeit für Strategie I: $t_1 \approx 152$ s
Ansatz für Lotfußpunkt:
mit GTR prgmGEOMETRI | Abstände → L(149,3 | 183,4)
und $\overline{LB} \approx 142{,}9$
Lotfußpunkt
Zeit für Strategie II: $t_2 \approx 126$ s 6 BE

b) Ansatz für Zielfunktion: $t = \frac{\overline{OP}}{6{,}4} + \frac{\overline{PB}}{1{,}6}$ mit

$P \in g_{P_1P_2}: y = \frac{4}{5}x + 64$

Zielfunktion:

$$t(x) = \frac{\sqrt{\left(\frac{4}{5}x + 64\right)^2 + x^2}}{6{,}4} + \frac{\sqrt{\left(295 - \left(\frac{4}{5}x + 64\right)\right)^2 + (60 - x)^2}}{1{,}6}$$

weiter mit GTR:

```
Y1 = 4/5*x+64
Y2 = √(Y1²+X²)/6.4+√((295-Y1)²+(60-X)²)/1.6
fMin(Y2,X,0,200) → 121.4
Y2(Ans) → 123.6
```

Minimale Zeit: $t_{min} \approx 124$ s
Koordinaten des Punktes: P (121 | 161) 4 BE