Schriftliche Abiturprüfung – Leistungskursfach – Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Aus rechtlichen Gründen möchte ich Sie darauf hinweisen, dass Sie sich auf einer **privaten** Seite befinden. Insbesondere ist dies **kein** Produkt des Sächsischen Staatsministeriums für Kultus, welches die Abituraufgaben entwickelt.

Dies ist die Abschrift der Prüfungsaufgaben 2006, wie sie vom Sächsischen Staatsministeriums für Kultus auf dem Sächsischen Schulserver (www.sachsen-macht-schule.de) veröffentlicht wurden.

Außerdem sollten Sie folgendes wissen:

- Lösungen der Aufgaben können auf unterschiedlichen Wegen erreicht werden. Hier finden Sie VORSCHLÄGE zur Lösung und VORSCHLÄGE zur Bewertung, die nicht für die Bewertung Ihres Abiturs herangezogen werden können. Dafür ist jeder prüfende Fachlehrer verantwortlich.
- Ich habe versucht, den graphikfähigen Taschenrechner (GTR – hier TI 82/83/83+) besonders häufig einzusetzen. Damit sollen Möglichkeiten aufgezeigt werden, auch wenn eine Rechnung vielleicht schneller zum Ziel führen würde.
- Eingesetzte Programme finden Sie auf den Mathe-Seiten des sächsischen Schulservers unter www.sn.schule.de/~matheabi dokumentiert und anhand von vielen Beispielen erklärt. Insbesondere möchte ich auf eine zusammenfassende Broschüre zu diesem Thema verweisen: www.sn.schule.de/~matheabi/data/gtrZsfsg.pdf.
- Die **offiziellen** Abituraufgaben werden nach Beendigung der Prüfungsphase auf dem Sächsischen Schulserver veröffentlicht.
- Für Nachfragen und Ihre Hinweise stehe ich Ihnen gerne zur Verfügung: F. Müller (mathe@oskar-reime-gymnasium.de) – Mathe-Lehrer.
  Dieses Dokument wurde zuletzt aktualisiert am 11.05.07.
- Wenn Sie Fehler finden oder Ergänzungen haben, teilen Sie mir das bitte mit.

Material für den Prüfungsteilnehmer

Allgemeine Arbeitshinweise

Ihre Arbeitszeit (einschließlich der Zeit für das Lesen der Aufgabentexte und der Zeit für die Auswahl der Wahlaufgabe) beträgt 300 **Minuten.**

Auf dem Deckblatt der Arbeit haben Sie den verwendeten GTR-Typ anzugeben.

Die Prüfungsarbeit besteht aus den zu bearbeitenden Pflichtteilen **A, B** und **C** sowie dem **Wahlteil W.**
Es sind alle Aufgaben der Pflichtteile zu bearbeiten.
Aus dem Teil W ist **genau eine** der beiden Aufgaben zu bearbeiten.
Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionen) Hilfslinien muss deutlich erkennbar in gut lesbarer Form dargestellt werden.

Bei Verwendung von GTR-Programmen ist anzugeben, aus welchen Eingabedaten das Programm welche Ausgabendaten berechnet.

Insgesamt sind 90 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar, davon
im Teil A 35 BE,
im Teil B 25 BE,
im Teil C 15 BE,
im Teil W 15 BE.

Erlaubte Hilfsmittel:

1 Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung
1 grafikfähiger, programmierbarer Taschenrechner (GTR) ohne Computer-Algebra-System
1 Tabellen- und Formelsammlung ohne ausführliche Musterbeispiele (im Unterricht eingeführt)
Zeichengeräte

Bewertungsmaßstab

Pkte.	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
60 BE	60-58	57-55	54-52	51-49	48-46	45-43	42-40	39-37	36-34	33-31	30-28	27-25	24-21	20-17	16-13	12-0

Prüfungsinhalt

Pflichtaufgaben

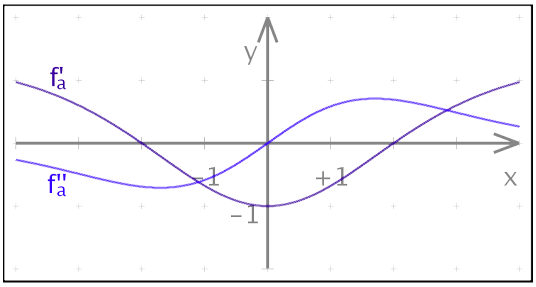
Teil A: Analysis

Für jedes a ($a \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$) ist eine Funktion f_a durch $f_a(x)=\dfrac{x^3+ax}{x^2-a}$ $\left(x\in \boldsymbol{D}_\mathbf{f}\right)$ gegeben.

a) Betrachtet wird die Funktion f_1.
Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich dieser Funktion an.
Geben Sie das Symmetrieverhalten sowie Näherungswerte für die Koordinaten der beiden lokalen Extrempunkte und des Wendepunkts des Graphen dieser Funktion an. Erreichbare BE-Anzahl: 5

b) Nebenstehende Abbildung zeigt für eine Funktion f_a die Graphen der Ableitungsfunktionen f_a' und f_a'' im Intervall $-4 \leq x \leq 4$.
Treffen Sie begründete Aussagen zu folgenden Eigenschaften der Funktion f_a in diesem Intervall:

- Extremstellen,
- Art der lokalen Extrema,
- Monotonieverhalten,
- Wendestelle. Erreichbare BE-Anzahl: 7



c) Berechnen Sie ohne Verwendung von Näherungswerten alle Werte a, für die gilt: $f'_a(1) = 0$.
Erreichbare BE-Anzahl: 5

d) Geben Sie die Anzahl der senkrechten Asymptoten des Graphen der Funktion f_a in Abhängigkeit von a an.
Bestimmen Sie eine Gleichung der schrägen Asymptote des Graphen der Funktion f_a.
Ermitteln Sie alle Werte a, für die die Funktion f_a genau drei Nullstellen besitzt.
Erreichbare BE-Anzahl: 7

e) Gegeben ist die Funktion F_a durch $F_a(x)= \frac{1}{2}x^2 + a \cdot \ln(x^2 - a)$ $(x \in \mathbf{D}_{fa})$.
Weisen Sie nach, dass die Funktion F_a eine Stammfunktion der Funktion f_a ist.
Für jedes a ($a \in \mathbb{R}$; $a < 0$) begrenzen der Graph der Funktion f_a und die Abszissenachse im 4. Quadranten eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie den Wert a, für den der Inhalt dieser Fläche $6 \cdot \ln(2) - 3$ beträgt.
Erreichbare BE-Anzahl: 7

f) Es soll eine Gleichung einer ganzrationalen Funktion g dritten Grades ermittelt werden, welche die Extremstellen $x_{E1} = -2$ und $x_{E2} = 2$ besitzt.
Folgende Lösungsschritte werden vorgeschlagen:
(1) Ableitungsfunktion von g: $g'(x)=(x+2)\cdot(x-2)$
$g'(x)=x^2-4$
(2) Gleichung einer Stammfunktion von g': $g(x) = 3^{-1}x^3 - 4x$ $(x \in \mathbb{R})$
Begründen Sie die Richtigkeit dieser Lösungsschritte.
Beschreiben Sie, wie mit diesem Lösungsverfahren die Gleichungen aller ganzrationalen Funktionen dritten Grades ermittelt werden können, welche die Extremstellen $x_{E1} = -2$ und $x_{E2} = 2$ besitzen.
Erreichbare BE-Anzahl: 4

Teil B: Geometrie /Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem ist für jedes $a \in \mathbb{R}$ eine Ebene E_a gegeben durch $E_a : (2 - 2a) \cdot x + 4y + (a + 1) \cdot z = 3 + 7a$.

a) Ermitteln Sie einen Näherungswert für den Schnittwinkel der Ebene E_3 mit der z-Achse.
Es existieren genau zwei Werte a so, dass die zugehörigen Ebenen E_a die z-Achse unter einem Winkel von 30° schneiden.
Bestimmen Sie für jeden Wert a einen Näherungswert.
Ermitteln Sie denjenigen Wert a, für den die zugehörige Ebene E_a senkrecht zur x-y-Koordinatenebene verläuft.
Untersuchen Sie, ob ein Wert a existiert, so dass die zugehörige Ebene E_a den Koordinatenursprung enthält.
Erreichbare BE-Anzahl: 10

b) Weisen Sie nach, dass sich alle Ebenen E_a in einer gemeinsamen Geraden s schneiden.
Erreichbare BE-Anzahl: 5

c) Es gibt genau einen Wert a, für den der Betrag des Abstands d der Ebene E_a zum Koordinatenursprung ein lokales Maximum besitzt.
Ermitteln Sie einen Näherungswert für diesen Wert a und geben Sie einen Näherungswert für diesen Abstand an.
Erreichbare BE-Anzahl: 4

d) Für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist eine Gerade g_c gegeben durch $g_c: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ c \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$.

Untersuchen Sie, für welche Werte von c und a

I. die Gerade g_c in der Ebene E_a liegt,

II. die Gerade g_c mit der Ebene E_a keinen gemeinsamen Punkt besitzt,

III. die Gerade g_c die Ebene E_a schneidet. Erreichbare BE-Anzahl: 6

Teil C: Stochastik

Bei einer Wahl gibt es genau fünf Wahlkreise. Jeder Wahlberechtigte dieser Wahlkreise hat genau eine Zweitstimme, die er nur für jeweils genau eine Partei abgeben kann.

Bei dieser Wahl erzielt die Partei A in den existierenden Wahlkreisen folgende Ergebnisse:

Wahlkreis	I	II	III	IV	V
Anteil der Wähler des Wahlkreises bezüglich der Gesamtwählerzahl in Prozent	25,7	9,4	25,5	21,8	17,6
Anteil. der Stimmen für die Partei A in Prozent	9,8	6,9	5,2	7,7	16,1

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig befragter Wähler dieser Wahlkreise die Partei A gewählt hat.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig befragter Wähler der Partei A aus dem Wahlkreis IV stammt. Erreichbare BE-Anzahl: 4

Eine weitere Partei B stellte sich zu dieser Wahl und erhielt 32 % aller abgegebenen Stimmen.

b) Aus einer sehr großen Anzahl von Stimmzetteln werden zufällig 50 ausgewählt.
Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit auf mehr als 10 und höchstens auf 14 dieser Stimmzettel die Partei B angekreuzt wurde.
Bei wie vielen der 50 ausgewählten Stimmzettel kann man erwarten, dass Partei B angekreuzt wurde? Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an. Erreichbare BE-Anzahl: 5

c) Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit unter 20 000 befragten Wählern mehr als 6 000 und weniger als 6 500 ihre Stimme der Partei B gegeben haben. Erreichbare BE-Anzahl: 3

d) Ermitteln Sie, wie viele gültige Stimmzettel man mindestens auswählen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95 % mindestens zwei Stimmzettel zu erhalten, auf denen die Partei B angekreuzt wurde. Erreichbare BE-Anzahl: 3

Teil D: Wahlaufgaben

Wählen Sie genau eine der folgenden Aufgaben zur Bearbeitung aus.

Wahlaufgabe 1

Flüstergewölbe, z. B. im Capitol in Washington oder in der Londoner St. Paul's Cathedral, sind Meisterleistungen der Architektur.

Die Abbildung zeigt den zur Ordinatenachse symmetrischen Querschnitt eines Gewölbes, dessen eine Begrenzungslinie durch den Graphen der Funktion f mit

$f(x) = \sqrt{-\frac{9}{25}x^2 + 81} \quad (x \in \mathbb{R}; -15{,}0 \le x \le 15{,}0)$ in einem ebenen kartesischen Koordinatensystem

beschrieben werden kann (1 Längeneinheit entspricht 1 Meter). Schallwellen werden entsprechend der Abbildung an der Gewölbedecke reflektiert.

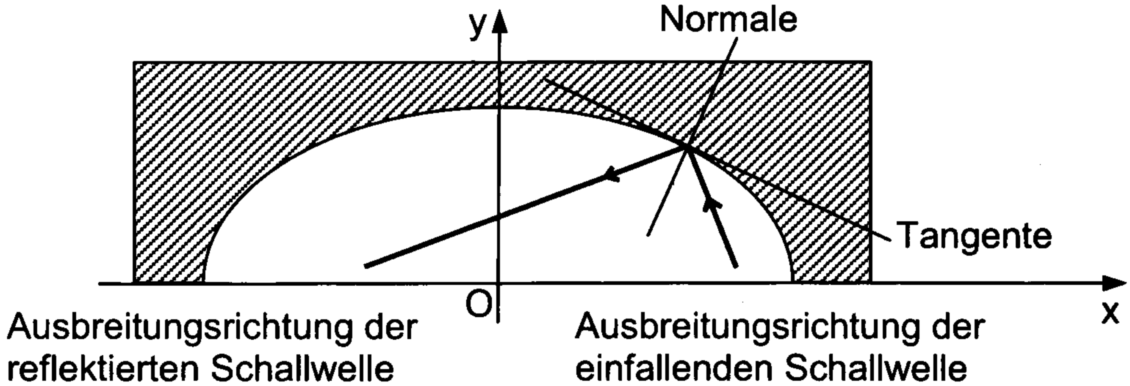


Abbildung 1: Skizze nicht maßstabgerecht

a) Das Deckengewölbe besitzt eine kreisförmige Grundfläche, wobei jeder senkrechte Schnitt durch den Mittelpunkt dieser Grundfläche eine Schnittfläche erzeugt, die zu der Fläche aus obiger Abbildung kongruent ist.
Berechnen Sie einen Näherungswert für das Volumen des Gewölbes. Erreichbare BE-Anzahl: 3

b) Weisen Sie nach, dass die Gerade mit der Gleichung

$$y = -\frac{\frac{9}{25}x_0}{\sqrt{-\frac{9}{25}x_0^2+81}}\cdot x + \frac{81}{\sqrt{-\frac{9}{25}x_0^2+81}} \quad \left(x\in\mathbb{R};\, x_0\in\mathbb{R};\, -15{,}0\le x_0\le 15{,}0\right)$$

Tangente an den Graphen von f im Punkt P_0 (x_0 | $f(x_0)$) ist. Erreichbare BE-Anzahl: 3

c) Eine vom Punkt A (11,0; 0,0) ausgehende Schallwelle wird an der Decke im Punkt B(9,0 | f(9,0)) reflektiert.
Ermitteln Sie einen Näherungswert für die Abszisse des Punktes, in dem die reflektierte Welle die Abszissenachse trifft. Erreichbare BE-Anzahl: 5

d) Eine vom Punkt D(4,8 | 0,0) ausgehende Schallwelle soll an der Decke in sich selbst reflektiert werden.
Ermitteln Sie einen Näherungswert für die Größe des Winkels, den diese Welle mit der positiven Abszissenachse einschließen muss. Erreichbare BE-Anzahl: 4

Wahlaufgabe 2

Ein Raumflugkörper besteht aus einem Rumpf und einem kegelförmigen Kopf.

In einem kartesischen Koordinatensystem befindet sich die Spitze im Punkt S (0,00 | 1,50). Eine Längeneinheit entspricht einem Meter.

Der Rumpf mit der Länge h_R entsteht durch Rotation des durch die Punkte P_2 und O_2 begrenzten Parabelsegments einer Parabel p um die Ordinatenachse, welche auch die Symmetrieachse des Raumflugkörpers ist.

Die Abbildung zeigt einen Achsenschnitt des Raumflugkörpers. Die Gerade durch die Punkte S und P_2 ist Tangente an die Parabel p im Punkt P_2 (0,50 | 0,00).

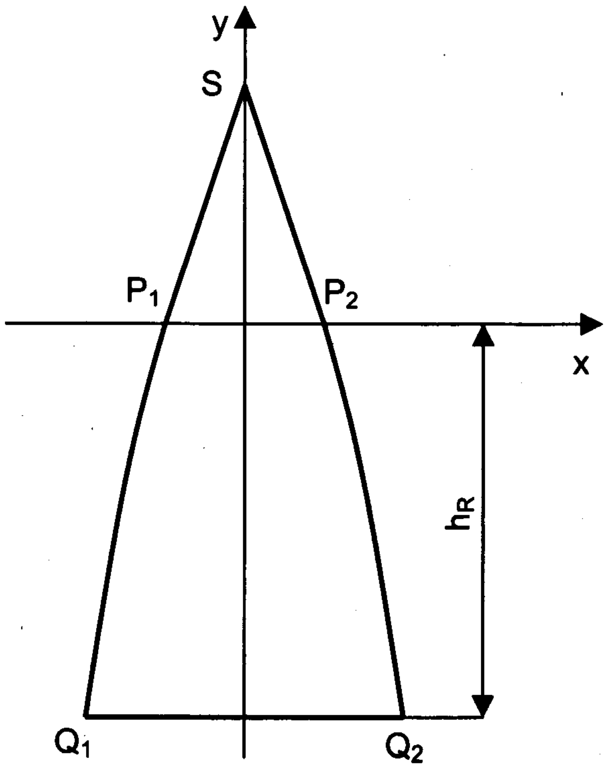


Abbildung 2: Skizze nicht maßstäblich

a) Ermitteln Sie eine Gleichung der Parabel p.
Erreichbare BE-Anzahl: 4

b) Der Inhalt der Grundfläche des kegelförmigen Kopfes verhält sich zum Flächeninhalt des Rumpfabschlusses mit dem Durchmesser $\overline{Q_1 Q_2}$ wie 1:9.
Berechnen Sie die Rumpflänge h_R dieses Raumflugkörpers. Erreichbare BE-Anzahl: 3

c) Für eine bestimmte Mission soll der Kopf des Raumflugkörpers einen kugelförmigen Satelliten aufnehmen. Die Wandstärke des Flugkörpers bleibt unberücksichtigt.
Berechnen Sie einen Näherungswert für den maximalen Radius, den der Satellit haben kann.
Erreichbare BE-Anzahl: 3

d) Für eine andere Mission soll dem kegelförmigen Kopf des Raumflugkörpers ein Zylinder so einbeschrieben werden, dass der Oberflächen inhalt des Zylinders maximal wird.
Berechnen Sie einen Näherungswert für das Volumen dieses Zylinders. Erreichbare BE-Anzahl: 5

Lösungsvorschläge

Teil A

a) größtmöglicher Definitionsbereich: $\mathbf{D_{f1}} = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge |x| \neq 1\}$
Aussage zum Symmetrieverhalten: $f_a(-x) = -f_a(x) \Rightarrow$ punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung
Koordinaten der lokalen Extrempunkte: $P_{E1}(-2{,}1 \mid -3{,}3)$, $P_{E2}(2{,}1 \mid 3{,}3)$ (2 BE)
Koordinaten des Wendepunkts: $P_W(0 \mid 0)$

b) Aussage zu Extremstellen und Art der Extrempunkte mit Begründung (3 BE)
wegen $f'_a(x_E=\pm 2) = 0$ liegt dort ein Extremum vor;
$f''_a(-2) < 0 \Rightarrow P_{Max}(-2 \mid f_a(-2))$ analog $P_{Min}(2 \mid f_a(2))$
Aussage zum Monotonieverhalten mit Begründung (2 BE)
wegen $f'_a(-2 \le x \le 2) \le 0 \Rightarrow f_a(-2 \le x \le 2)$ monoton fallend, sonst abschnittsweise monoton steigend
Aussage zur Wendestelle: liegt bei $O(0 \mid f_a(0))$ vor: $f''_a(0) = 0$ und existiert, da auch $f''_a(0)$ steigt
Begründung für notwendige und hinreichende Bedingung der Wendestelle

c) Ansatz für 1. Ableitung
1 . Ableitung: $f'_a(x) = \dfrac{x^4 - 4\cdot a\cdot x^2 - a^2}{(x^2-a)^2}$
Ansatz für Werte a: $0 = \dfrac{1-4\cdot a - a^2}{(1-a)^2} \Rightarrow 0 = a^2 + 4a - 1$
Werte a: $a_1 = \sqrt{5} - 2$, $a_2 = -\sqrt{5} - 2$ (2 BE)

d) Anzahl der senkrechten Asymptoten für $a > 0$: 2
Anzahl der senkrechten Asymptoten für $a < 0$: 0
Ansatz für schräge Asymptote: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_a(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} x = \pm\infty$ $\Rightarrow$ eine schräge A.:
Gleichung der schrägen Asymptote: z. B. $y = x$
Ansatz für Werte a: $0 = x_0 \cdot (x_0^2 + a)$
Nullstellen in Abhängigkeit von a
Werte a: $\{a \mid a < 0\}$

e) Ansatz für Nachweis der Stammfunktion: $F'_a(x) = f_a(x)$
Nachweis der Stammfunktion
Ansatz für Flächeninhalt: $A = \int_{\sqrt{-a}}^{0} f_a(x)dx = F_a(0) - F_a(\sqrt{-a}) = \frac{1}{2}a - a \cdot \ln 2$
Umformungen (2 BE)
Ansatz für Wert a: $\frac{1}{2}a - a \cdot \ln 2 = -3 + 6 \ln 2$
Wert a: $a = -6$

f) Begründung der Richtigkeit der Lösungsschritte (2 BE)
Beschreibung der Verallgemeinerung zum Lösungsschritt (1): $k \cdot g'(x)$
Beschreibung der Verallgemeinerung zum Lösungsschritt (2): $g(x) + c$

Teil B

a) Ansatz für Schnittwinkel: Normale $\vec{n} = \vec{n}(a) = \vec{n}_{E_a}$
Vektoren: $\vec{n}_{E_a} = \begin{pmatrix} 2-2a \\ 4 \\ a+1 \end{pmatrix} \wedge \vec{n}_{E_3} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \wedge \vec{\zeta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
Schnittwinkel: $\alpha \approx 35{,}3°$

Ansatz für Werte a: $\frac{1}{2}=\sin 30°=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{\zeta}|}{|\vec{n}|}=\frac{|a+1|}{\sqrt{(2-2a)^2+16+(a+1)^2}}$

Umformungen: $a^2 - 14 \cdot a + 17 = 0$

Werte a: $a_1 \approx 1{,}3$; $a_2 \approx 12{,}7$ (2 BE)

Ansatz für Wert a: z-Komponente von $\vec{n}_E$ muss 0 sein $\Rightarrow a + 1 = 0$

Wert a: $a = -1$

Untersuchung (2 BE): $3 + 7a = 0 \Rightarrow E_{-\frac{3}{7}}$ enthält den Koordinatenursprung

b) Ansatz für Schnittgerade
und allgemeiner Nachweis (3 BE): mit $a \neq b$ ist die Schnittgerade durch:
I: $(2 - 2a) \cdot x + 4y + (a + 1) \cdot z = 3 + 7a$
II: $(2 - 2b) \cdot x + 4y + (b + 1) \cdot z = 3 + 7b$
in Koordinatenform gegeben.

$\frac{I-II}{a-b}$ führt wegen $a - b \neq 0$ zu $z = 2x + 7$ und z *in I* zu $y = -x - 1 \Rightarrow$

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\-1\\7\end{pmatrix}+x\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}(x\in\mathbb{R})$$

Schnittgerade: z. B. $\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}(r\in\mathbb{R})$

c) Ansatz für Abstand (2 BE): $\mathrm{d}(O, E_a)=\frac{3+7a}{|\vec{n}_{E_a}|}$ (vorzeichenbehafteter Abstand)

weiter mit GTR: `fMax(3+7X/√(5X²-6X+21),X,-10,10)` → a = 13/3

Wert a: $a \approx 4{,}3$

Abstand: $d \approx 3{,}5 = 5/\sqrt{2}$

d) Ansatz für Untersuchung: $g_c \,||\, E_a \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\cdot\vec{n}_{E_a}=0 \Rightarrow a = -5$ und

$$g_c \subset E_{-5} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-2\\c\\3\end{pmatrix}\cdot\vec{n}_{E_{-5}}=3+7\cdot(-5)$$

Untersuchung (2 BE)
I. $c = 1$ und $a = -5$
II. $c \neq 1$ und $a = -5$
III. $c \in \mathbb{R}$ und $a \neq -5$

Teil C

Interpretation der gegebenen Größen:
i – Wahlkreis;
X – Zufallsgröße, die beschreibt aus welchem Wahlkreis der Wähler stammt; x_i bildet eine Zerlegung
Z – Zufallsgröße (ZG), die beschreibt welche Partei gewählt wurde

x_i	I	II	III	IV	V
$P(X=x_i)$	0,257	0,094	0,255	0,218	0,176
$P_{(X=x_i)}(Y=A)$	0,098	0,069	0,052	0,077	0,161
$P(X=x_i \wedge Y=A)$	0,0252	0,0065	0,0133	0,0168	0,0283

a) Ansatz für Wahrscheinlichkeit: Satz der totalen Wahrscheinlichkeit
Wahrscheinlichkeit: $p \approx 0{,}0901$
Ansatz für bedingte Wahrscheinlichkeit: $P_{(Y=A)}(X=IV)$
bedingte Wahrscheinlichkeit: $p \approx 0{,}1863$

b) Charakterisierung der Zufallsgröße: Binomialverteilung mit n = 50 und p = .32
Ansatz für Wahrscheinlichkeit: $b_{n,p}(11) + b_{n,p}(12) + b_{n,p}(13) + b_{n,p}(14)$
GTR (TI-83): `binomcdf(50,.32,14) - binomcdf(50,.32,10)`
Wahrscheinlichkeit: $P(11 \leq X \leq 14) \approx 0{,}2865$
Erwartungswert: 16
Wahrscheinlichkeit: $P(X = 16) \approx 0{,}1202$

c) Charakterisierung der Zufallsgröße: Binomialverteilung mit n = 20000 und p = .32
GTR (TI-83): `binomcdf(20000,.32,6499) - binomcdf(20000,.32,6000)`
Ansatz für Wahrscheinlichkeit
Wahrscheinlichkeit: $P(6001 \leq Y \leq 6499) \approx 0{,}93$

d) Ansatz für Anzahl (2 BE):
$P(X \geq 2) = 1 - b_{n,.32}(0) - b_{n,.32}(1) = 1 - 0.68^n - n \cdot 0.32 \cdot 0.68^{n-1} > 0.95$
$0.05 > 0.68^n + n \cdot 0.32 \cdot 0.68^{n-1} \Rightarrow$ z. B.: $0.05 > 0.68^n(1 + \frac{1}{2}n)$ und
grafische Lösung mit $0.68^{-n} > 20 + 10n$
Anzahl: n = 13

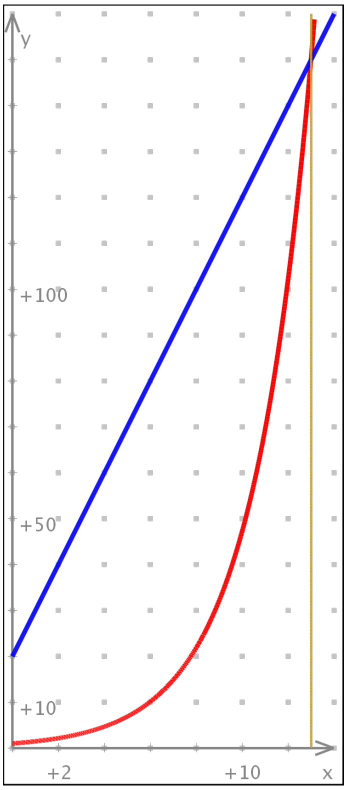


Abbildung 3: grafische Lösung

Teil W1

a) Ansatz (2 BE): z. B.: Berechnen der inversen Funktion[1] und Integration

$$f^{-1}(x)=\frac{5}{3}\sqrt{81-x^2} \Rightarrow$$

$$V=\pi\cdot\int_0^9 \left(f^{-1}(x)\right)^2 dx=1350\cdot\pi$$

Volumen: V ≈ 4 240 m³

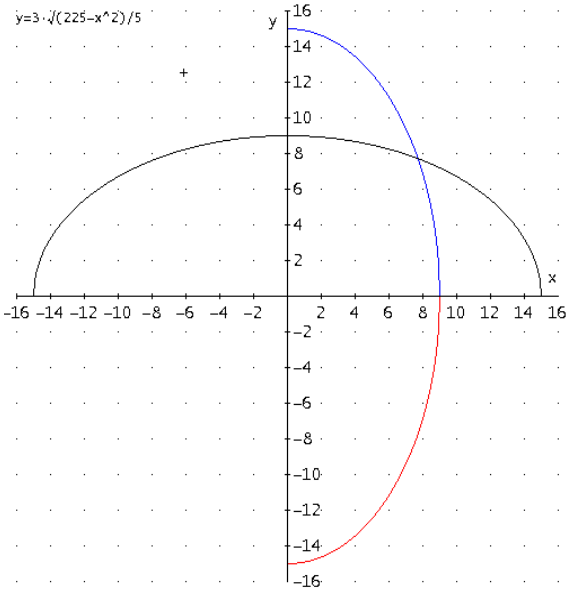


Abbildung 4: Funktion und Inverse

b) Ansatz für Nachweis:
mit $f'(x_0) = m$ und $f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 = n$
erste Ableitung
Nachweis für Anstieg

c) Anstieg der Geraden durch A und B
Tangentenanstieg
Ansatz für Abszisse des Punktes (2 BE)
Abszisse des Punktes: x ≈ -5,7
Beispielrechnung:
Anwendung Sinussatz – Abbildung 5
tan α = 3.6; tan β = 20/9 (Normale)
⇒ γ ≈ 39,75° und δ ≈ 26,02° ⇒ Δx ≈ 16,7489

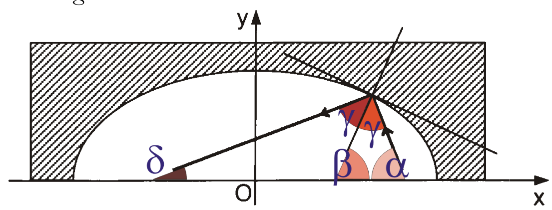


Abbildung 5: Bezeichnung der Winkel

d) Suche Anstieg der Normale an den Graphen von f in (a | f(a)) durch D

Normale an der Stelle a: $$y=\frac{-1}{f'(a)}\cdot x+\left(f(a)+\frac{1}{f'(a)}\cdot a\right)=\frac{a-x}{f'(a)}\cdot+f(a)$$

Normale durch D an der Stelle a: $$0=\frac{a-4.8}{f'(a)}+f(a)$$

mit GTR: `Y1` = f(x);
`solve((X-4.8)/nDerive(Y1,X,X)+Y1,X,6)` → a = 7.5 und tan α = -1/f'(a);
`atan(-1/nDerive(Y1,X,7.5))` → 70.89°
Anstieg der Geraden durch D und P_0
Ansatz für Abszisse des Punktes P_0
Abszisse des Punktes P_0
Winkel: α ≈ 70,9°

Teil W2

a) Ansatz für Gleichung der Parabel: $p_{a,b}(x) = ax^2 + b$ (Symmetrie)
I: $p_{a,b}(0.5) = 0$ und II: $p'_{a,b}(0.5) = a = -3$ (Anstieg)
Anstieg der Tangente
Gleichungssystem
eine Gleichung der Parabel: z. B y = -3 x² + ¾ = f(x)

b) Radius des Rumpfabschlusses: $$\frac{\pi x_{P_2}^2}{\pi x_{Q_2}^2}=\frac{1}{9} \Rightarrow x_{Q_2}=\frac{3}{2}$$

Ansatz für Rumpflänge: -f(1.5)
Rumpflänge: h_R = 6,00 m

---

1 Durch Vertauschen der x- und y-Achse wird aus y ≥ 0 ⇒ x ≥ 0 und nicht zu vergessen, die Integrationsgrenzen müssen angepasst werden. O. b. d. A. beschränke ich y ≥ 0 ∧ x ≥ 0.

c) Ansatz (2 BE):
z. B.: Ähnlichkeit → sei r = 1 m ergibt sich die Rechnung, wie in Abbildung 6 zu sehen ist. Nun skaliere ich das Bild so, dass aus der Höhe $1+\sqrt{10}$ die gewünschte Höhe 1,5 m wird und somit ändert sich auch der Radius auf $\frac{1{,}5}{1+\sqrt{10}}$
Radius: r = 0,36 m

d) Ansatz für Zielfunktion: r ⇒ h = - 3r + 1.5
Zielfunktion: $A_O(r,h) = 2\pi r (r + h)$
erste Ableitung und Extremstelle: $r_E = 3/8$
Nachweis des Maximums
Volumen: $V \approx 0{,}17\ m^3 = \frac{27\pi}{512}$

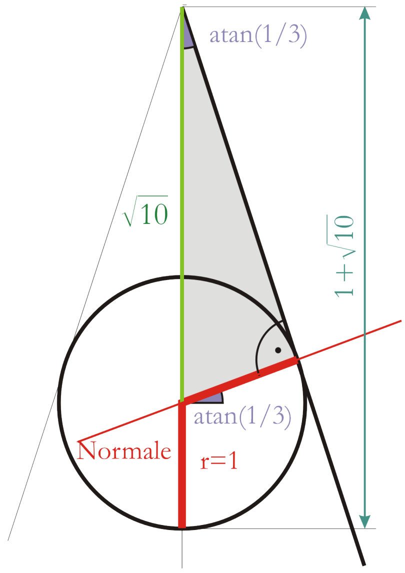


Abbildung 6: zur Lösung ähnliches Bild