Sächsisches Staatsministerium
für Kultus

Schuljahr **2006/07**

Geltungsbereich:
- Allgemein bildendes Gymnasium
- Abendgymnasium und Kolleg
- Schulfremde Prüfungsteilnehmer

Schriftliche Abiturprüfung
Grundkursfach Mathematik

- E R S T T E R M I N -

Material für den Prüfungsteilnehmer

Allgemeine Arbeitshinweise

Ihre Arbeitszeit (einschließlich der Zeit für das Lesen der Aufgabentexte und der Zeit für die Auswahl der Wahlaufgabe) beträgt **240 Minuten.**

Auf dem Deckblatt der Arbeit haben Sie den verwendeten GTR-Typ anzugeben.

Die Prüfungsarbeit besteht aus den zu bearbeitenden **Pflichtteilen A**, **B** und **C** sowie dem **Wahlteil D**.
Es sind alle Aufgaben der Pflichtteile zu bearbeiten.
Aus dem Teil D ist **genau eine** der beiden Wahlaufgaben zu bearbeiten.

Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionen) Hilfslinien muss deutlich erkennbar in gut lesbarer Form dargestellt werden.

Insgesamt sind 60 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar, davon

im Teil A	25 BE,
im Teil B	15 BE,
im Teil C	10 BE,
im Teil D	10 BE.

Erlaubte Hilfsmittel:
- Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung
- Taschenrechner ohne Computer-Algebra-System
- Tabellen- und Formelsammlung (im Unterricht eingeführt, ohne ausführliche Musterbeispiele)
- Zeichengeräte

Prüfungsinhalt

Pflichtaufgaben

Teil A: Analysis

Gegeben ist die Funktion f durch die Gleichung $y = f(x) = \left(x^2 - 1\right) \cdot e^{-x} \quad \left(x \in D_f\right)$.

a) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich und das Verhalten von f im Unendlichen an.

Geben Sie die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen von f mit den Koordinatenachsen und Näherungswerte für die Koordinaten der lokalen Extrempunkte sowie deren Art an.

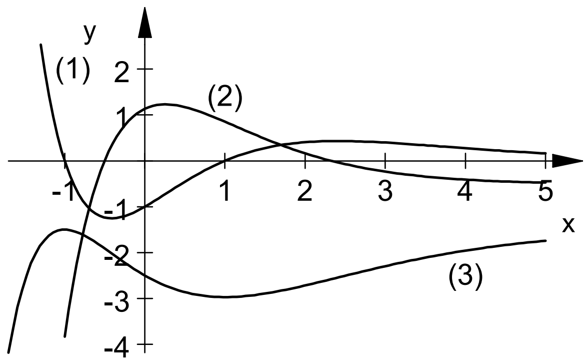
Erreichbare BE-Anzahl: 7

b) Begründen Sie unter Verwendung von Funktionseigenschaften, dass der Graph der stetigen Funktion f mindestens zwei Wendepunkte besitzt.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

c) In nebenstehender Abbildung sind die Graphen der Funktion f, einer ihrer Stammfunktionen F und einer weiteren Funktion dargestellt.

Geben Sie an, welche der drei Kurven den Graphen von f und welche den Graphen von F darstellt.
Begründen Sie Ihre Entscheidung für F.



Erreichbare BE-Anzahl: 3

d) Die Gerade t ist die Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt $P(1; f(1))$.

Ermitteln Sie ohne Verwendung von Näherungswerten eine Gleichung der Geraden t.

Die Gerade t und die Koordinatenachsen begrenzen eine Fläche vollständig.

Zeigen Sie, dass diese Fläche den Inhalt $\frac{1}{e}$ hat.

Erreichbare BE-Anzahl: 6

e) Es existiert genau ein Wert u $(u \in \mathbb{R}; -1 \leq u \leq 0)$, für den der Abstand des Punktes $Q_u(u; f(u))$ vom Koordinatenursprung maximal ist.

Ermitteln Sie einen Näherungswert für u.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

Fortsetzung auf Seite 3

Fortsetzung Teil A: Analysis

f) Der Graph der Funktion f und die Koordinatenachsen begrenzen im dritten Quadranten eine Fläche vollständig.

Ermitteln Sie den Inhalt dieser Fläche.

Für jedes b $(b \in R)$ ist eine Funktion g_b durch die Gleichung

$y = g_b(x) = f(x+b) \quad (x \in D_{g_b})$ gegeben.

Begründen Sie, dass für alle b mit $-1 < b < 1$ der Graph der Funktion g_b und beide Koordinatenachsen im dritten Quadranten eine Fläche vollständig begrenzen.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

Teil B: Geometrie / Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem mit dem Koordinatenursprung O sind die Punkte $A(-3;-2;-3)$, $B(3;-4;-3)$, $C(-1;4;-3)$ und $S(1;0;4{,}5)$ Eckpunkte einer dreiseitigen Pyramide mit der Spitze S.

a) Weisen Sie nach, dass das Dreieck ABC gleichschenklig und rechtwinklig ist.

Stellen Sie diese Pyramide in einem kartesischen Koordinatensystem dar.

Berechnen Sie das Volumen dieser Pyramide.

Erreichbare BE-Anzahl: 6

b) Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes D, so dass das Viereck mit den Eckpunkten A, B, C und D ein Quadrat ist.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

c) Eine Ebene E ist gegeben durch $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (s, t \in R)$.

Untersuchen Sie, welche Seitenfläche der Pyramide in der Ebene E liegt.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

d) Zeigen Sie, dass für jeden Wert $r \in R$ der Punkt $Q_r(-3+3r; -2-r; -3)$ auf der Geraden g durch die Punkte A und B liegt.

Ermitteln Sie den Wert r, für den die Strecke $\overline{OQ_r}$ senkrecht zur Geraden g liegt.

Geben Sie alle Werte r an, für die der Punkt Q_r auf der Kante $\overline{AB}$ liegt.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

Teil C: Stochastik

Für ihren letzten Schultag bestellen Anne und Felix für jeden der 85 Schüler der Jahrgangsstufe 12 ihres Gymnasiums ein T-Shirt bei einem regionalen Hersteller.

In jeder Größe kann man aus drei verschiedenen Stoffqualitäten, zehn Farben und den Modellen Classic-T, Polo oder Soccer wählen.

a) Geben Sie an, wie viele Wahlmöglichkeiten es in jeder Größe für die Ausstattung der T-Shirts gibt.

Erreichbare BE-Anzahl: 1

Nach Angaben des Herstellers haben 12 % seiner T-Shirts einen Nähfehler und 10 % einen Farbfehler. Näh- und Farbfehler treten unabhängig voneinander auf.

Der Hersteller verkauft T-Shirts ohne Fehler als erste Wahl. Besitzt ein T-Shirt einen Näh- und einen Farbfehler, so wird es als dritte Wahl angeboten. Alle anderen T-Shirts werden als zweite Wahl verkauft.

b) Zeigen Sie, dass ein zufällig ausgewähltes T-Shirt mit der Wahrscheinlichkeit $0{,}7920$ die Qualität erste Wahl besitzt.

Geben Sie an, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein zufällig ausgewähltes T-Shirt zweite und mit welcher Wahrscheinlichkeit ein zufällig ausgewähltes T-Shirt dritte Wahl ist.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

A: Mindestens 75 der gelieferten T-Shirts sind erste Wahl.

B: Unter den 85 gelieferten T-Shirts befinden sich mehr T-Shirts erster Wahl als zu erwarten sind.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

d) Beim Hersteller erhalten Anne und Felix alle T-Shirts für 5,50 € je Stück.

Um einen Beitrag zur Finanzierung des Abiturballs ihres Gymnasiums zu leisten, verlangen sie für T-Shirts erster Wahl 7,00 € von ihren Mitschülern. Bei T-Shirts dritter Wahl soll dieser Preis um 50 % reduziert werden.

Bestimmen Sie, in welcher Höhe Anne und Felix den Preis für ein T-Shirt zweiter Wahl mindestens festlegen müssen, damit sie einen Gewinn von mindestens 110 € beim Verkauf der T-Shirts erwarten können.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

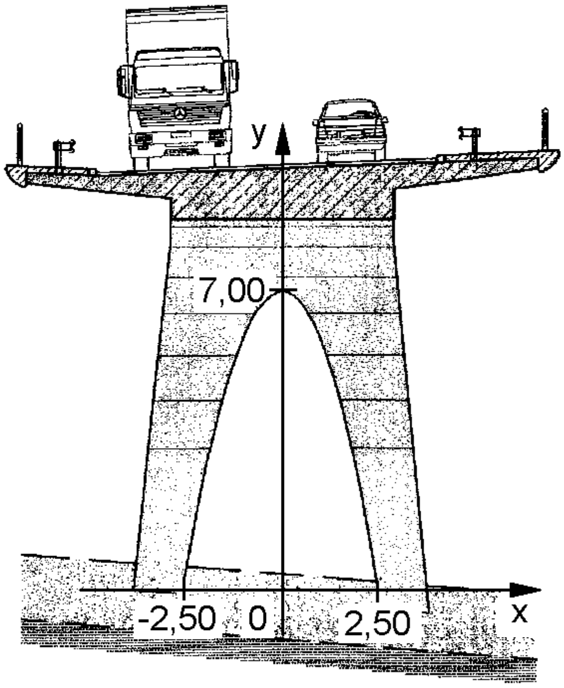
Teil D: Wahlaufgaben

Wählen Sie genau eine der folgenden Aufgaben zur Bearbeitung aus.

Wahlaufgabe 1

Zur Ortsumgehung der Stadt Stollberg (Erzgebirge) wurde für die Bundesstraße B 180 eine Brücke gebaut.

Nebenstehende Skizze zeigt den Querschnitt einer Stütze dieser Brücke in einem kartesischen Koordinatensystem (1 Einheit entspricht 1 Meter).



Skizze (nicht maßstäblich)

Die innere Begrenzung des Querschnitts der Stütze ist eine Parabel p.

a) Die Parabel p kann im Intervall $-2{,}50 \le x \le 2{,}50$ näherungsweise durch eine quadratische Funktion p_1 oder durch eine Funktion vierten Grades p_2 mit

$p_2(x) = 0{,}03x^4 - 1{,}32x^2 + 7{,}00$ beschrieben werden.

Ermitteln Sie die maximale Abweichung der Funktionswerte der Funktionen p_1 und p_2 voneinander.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

b) Die Fahrbahn verläuft durch den Punkt $P(0{,}00;9{,}00)$ und hat eine Neigung von 4 % gegenüber der x-Achse. Die Seitenbegrenzungen der Fahrbahn liegen auf einem Kreis um den Punkt $M(0{,}00;6{,}00)$ mit dem Radius $5{,}50\text{ m}$.
Berechnen Sie die Breite der Fahrbahn.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

c) Vor Einführung der Autobahnmaut überquerten durchschnittlich 200 Fahrzeuge pro Stunde die Brücke. Damals kamen auf 20 Fahrzeuge 3 LKW.
Inzwischen ist die Gesamtanzahl der Fahrzeuge pro Stunde um 10 % gestiegen. Der Anteil der LKW am Fahrzeugaufkommen hat um ein Drittel zugenommen.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass heute durchschnittlich mindestens 40 LKW die Brücke pro Stunde überqueren.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

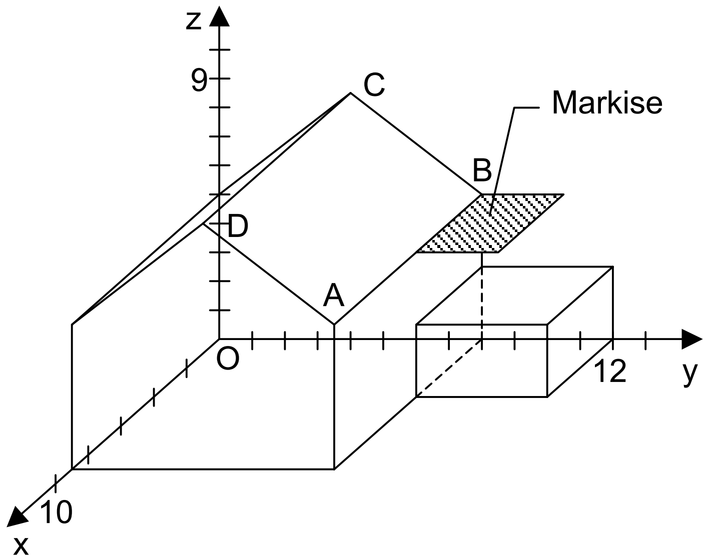
Wahlaufgabe 2

Ein Einfamilienhaus hat eine rechteckige Grundfläche. Es ist 9,00 m lang und 8,00 m breit. Bis zum Dachansatz beträgt die Höhe 5,00 m, die Gesamthöhe ist 8,50 m. Die Dachfläche besteht aus zwei zueinander kongruenten Rechtecken.

Die angrenzende quaderförmige Garage ist 4,00 m lang, 4,00 m breit und 2,50 m hoch. Auf ihrem Dach befindet sich eine Terrasse.

Der Eckpunkt O der Grundfläche des Hauses liegt im Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems (1 Einheit entspricht 1 Meter).

Die Grundflächen von Haus und Garage befinden sich in der x-y-Koordinatenebene (siehe Skizze).



Skizze (nicht maßstäblich)

a) Geben Sie die Koordinaten des Punktes B auf der Dachansatzgeraden AB und des Punktes D auf der Dachfirstgeraden CD an.

Ermitteln Sie den Inhalt der Dachfläche des Wohnhauses.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

Um 13:30 Uhr eines bestimmten Tages haben die parallel einfallenden Lichtstrahlen in der Umgebung des Hauses die Richtung $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0{,}00 \\ 4{,}00 \\ -4{,}50 \end{pmatrix}$.

b) Begründen Sie, dass bei dieser Richtung des Lichteinfalls die Schattengrenze auf der Terrassenfläche durch den Dachansatz AB und nicht durch den Dachfirst CD entsteht.

Berechnen Sie, welcher prozentuale Anteil der Terrassenfläche sich zu diesem Zeitpunkt im Schatten befindet.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

c) Am Dachansatz AB ist eine Markise in der Breite der Terrasse so angebracht, dass sie parallel zur Terrassenfläche ausgefahren werden kann.

Ermitteln Sie, wie weit diese Markise mindestens ausgefahren werden muss, damit sich die gesamte Terrasse um 13:30 Uhr dieses Tages im Schatten befindet.

Erreichbare BE-Anzahl: 3