
Schriftliche Abiturprüfung Grundkursfach Mathematik

- E R S T T E R M I N -

Material für den Prüfungsteilnehmer

Allgemeine Arbeitshinweise

Ihre Arbeitszeit (einschließlich der Zeit für das Lesen der Aufgabentexte und der Zeit für die Auswahl der Wahlaufgabe) beträgt **240 Minuten**.

Auf dem Deckblatt der Arbeit haben Sie den verwendeten GTR-Typ anzugeben.

Die Prüfungsarbeit besteht aus den zu bearbeitenden **Pflichtteilen A, B und C** sowie dem **Wahlteil D**.

Es sind alle Aufgaben der Pflichtteile zu bearbeiten.

Aus dem Teil D ist **genau eine** der beiden Wahlaufgaben zu bearbeiten.

Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionen) Hilfslinien muss deutlich erkennbar in gut lesbarer Form dargestellt werden.

Insgesamt sind 60 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar, davon

im Teil A	25 BE,
im Teil B	15 BE,
im Teil C	10 BE,
im Teil D	10 BE.

Erlaubte Hilfsmittel:

- Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung
- Taschenrechner ohne Computer-Algebra-System
- Tabellen- und Formelsammlung (im Unterricht eingeführt, ohne ausführliche Musterbeispiele)
- Zeichengeräte

Prüfungsinhalt

Pflichtaufgaben

Teil A: Analysis

Gegeben sind die Funktionen f und g durch die Gleichungen $f(x) = \frac{3x - 2x^3}{x^2 + 1}$ ($x \in D_f$)

und $g(x) = -2x$ ($x \in \mathbb{R}$).

- a) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion f an.
Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten des Graphen der Funktion f .
Berechnen Sie ohne Verwendung von Näherungswerten die Nullstellen der Funktion f .
Geben Sie Näherungswerte für die Koordinaten aller lokalen Extrempunkte des Graphen der Funktion f sowie deren Art an.

Erreichbare BE-Anzahl: 7

- b) Weisen Sie nach, dass die Funktion $F(x) = \frac{5}{2} \ln(x^2 + 1) - x^2$ ($x \in D_F$) eine Stammfunktion der Funktion f ist.
Der Graph der Funktion f und die x -Achse schließen im ersten Quadranten eine Fläche vollständig ein.
Ermitteln Sie einen Näherungswert für den Flächeninhalt dieser Fläche.
Ermitteln Sie einen Näherungswert für die reelle Zahl c , für welche die Gerade $x = c$ diese Fläche halbiert.

Erreichbare BE-Anzahl: 6

- c) Geben Sie den Schnittpunkt der Graphen der Funktionen f und g an.
Für jedes u ($u \in \mathbb{R}, u > 0$) schneidet die Gerade $x = u$ den Graphen der Funktion f im Punkt P_u und den Graphen der Funktion g im Punkt Q_u .
Es gibt genau einen Wert u , für den die Länge der Strecke $\overline{P_u Q_u}$ maximal wird.
Ermitteln Sie diesen Wert u und geben Sie den maximalen Abstand an.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

- d) Weisen Sie nach, dass die Funktion f' mit $f'(x) = \frac{-2x^4 - 9x^2 + 3}{(x^2 + 1)^2}$ ($x \in D_{f'}$) die erste Ableitungsfunktion der Funktion f ist.
Untersuchen Sie rechnerisch, wie viele Tangenten an den Graphen der Funktion f parallel zum Graphen der Funktion g verlaufen.
Geben Sie eine Gleichung einer solchen Tangente an.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

- e) Es gibt ganzrationale Funktionen zweiten Grades, die mit dem Graphen der Funktion f die beiden am weitesten voneinander entfernt liegenden Nullstellen gemeinsam haben und deren Graphen achsensymmetrisch zur y -Achse sind.
Ermitteln Sie eine Gleichung einer solchen Funktion.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

Teil B: Geometrie / Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(0; -3; 0)$, $B(3; 1; 0)$, $C(1; 5; 0)$ und $D(-3; 3; 0)$ sowie die Ebene ε mit der Gleichung $z = 6$ gegeben.

Das Viereck ABCD ist die Grundfläche eines vierseitigen geraden Prismas ABCDEFGH. Die Deckfläche EFGH dieses Prismas liegt in der Ebene ε . Die Strecke \overline{AE} ist Kante des Prismas.

- a) Stellen Sie die Grundfläche des Prismas in einem kartesischen Koordinatensystem dar.

Weisen Sie rechnerisch nach, dass das Viereck ABCD ein Trapez ist.

Zeigen Sie mithilfe des Skalarprodukts, dass das Viereck ABCD zwei rechte Innenwinkel besitzt.

Berechnen Sie das Volumen des Prismas.

Erreichbare BE-Anzahl: 8

Auf der z-Achse befindet sich im Punkt $L(0; 0; 10)$ eine punktförmige Lichtquelle.

- b) Durch das einfallende Licht entsteht ein Schatten des Prismas in der x-y-Ebene.

Bestimmen Sie die Koordinaten des Schattenpunktes E_S des Punktes E.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

- c) Ein Schüler soll überprüfen, ob ein vom Punkt L in Richtung $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$

ausgehender Lichtstrahl die Körperkante \overline{EF} trifft. Er wählt folgenden Lösungsweg:

(1) Ermittlung der Gleichung der Geraden g durch L in Richtung Vektor \vec{a} und der Gleichung der Geraden h durch die Punkte E und F.

(2) Untersuchung der Lagebeziehung zwischen den Geraden g und h: Schnittpunkt $S(6; 5; 6)$.

(3) Schlussfolgerung: Der Lichtstrahl trifft die Kante.

Untersuchen Sie den Lösungsweg auf Korrektheit und korrigieren Sie gegebenenfalls Fehler.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

Teil C: Stochastik

Eine Brauerei benutzt für ein Gewinnspiel Kronenkorken, die auf der Innenseite mit je genau einem Buchstaben bedruckt sind.

Die Besucher eines Brauereifestes können aus einer Urne derartige Kronenkorken nach verschiedenen Spielregeln ziehen und Preise gewinnen.

Die Urne enthält vor einer Ziehung 100 solcher Kronenkorken, darunter 25 mit dem Buchstaben S, 10 mit dem Buchstaben F, 45 mit dem Buchstaben A und 20 Kronenkorken mit anderen Buchstaben.

- a) Aus der Urne werden drei Kronenkorken mit Zurücklegen entnommen.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

Ereignis A: Mindestens zwei Kronenkorken tragen den Buchstaben S.

Ereignis B: Es wird keiner der Buchstaben S, F und A gezogen.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

- b) Berechnen Sie, wie viele Kronenkorken beim Ziehen mit Zurücklegen aus der Urne mindestens entnommen werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,90 mindestens ein Buchstabe F gezogen wird.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

- c) Hauptgewinne werden an die Besucher vergeben, die bei viermaligem Ziehen mit Zurücklegen vier Kronenkorken mit dem Buchstaben H gezogen haben.

Die Wahrscheinlichkeit eines Hauptgewinns beträgt $2,0736 \cdot 10^{-4}$.

Bestimmen Sie die Anzahl der Kronenkorken mit dem Buchstaben H, die in der Urne enthalten sind.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

Eine Million Flaschen mit den Gewinnspiel-Kronenkorken, darunter 25 000 mit dem Buchstaben W, sind in Kästen zu je 20 Flaschen an den Einzelhandel ausgeliefert worden.

- d) Bestimmen sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Bierkasten mindestens einen Kronenkorken mit dem Buchstaben W enthält.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

Teil D: Wahlaufgaben

Wählen Sie genau eine der folgenden Aufgaben zur Bearbeitung aus.

Wahlaufgabe 1

Eine Gemeinde hat in einem ebenen Geländeabschnitt ein Grundstück erworben, um es als Gewerbegebiet zu erschließen.

In die Flurkarte der Gemeinde wird ein x - y -Koordinatensystem so eingetragen, dass die Bundesstraße von B-Dorf nach A-Stadt durch die x -Achse beschrieben wird.

Eine Längeneinheit entspricht 100 m.

Das erworbene Grundstück hat die Form eines Rechtecks mit dem Punkt $C(-1; 3)$ als Eckpunkt.

Die Gerade g verläuft durch Punkt C in

Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und begrenzt

das Grundstück. Die Punkte $D(2; -2)$ und $E(-2; -3)$ liegen auf je einer Seite des Rechtecks.

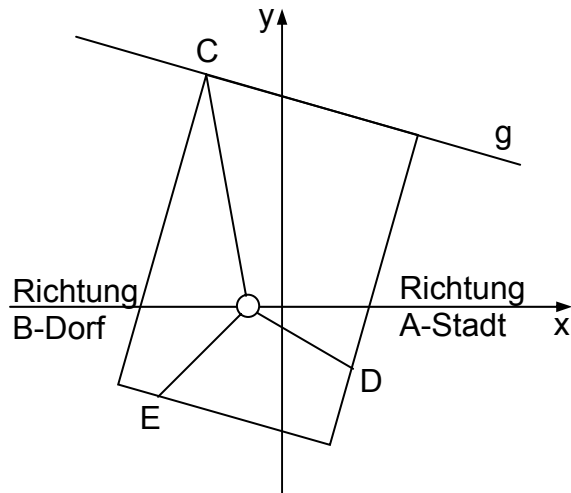


Abbildung (nicht maßstäblich)

- a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des erworbenen Grundstücks in Quadratmeter.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

- b) Von den Punkten C , D und E sollen Straßen geradlinig zu einem gemeinsamen Punkt auf der Bundesstraße, dem Mittelpunkt eines Kreisverkehrs, führen.

Aus Kostengründen soll die Summe der Längen der drei Straßen minimal werden.

Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes des Kreisverkehrs und die Gesamtlänge der Straßen.

Hinweis: Die Straßenbreiten und der Durchmesser des Kreisverkehrs sind in den Berechnungen zu vernachlässigen.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

- c) Nach Fertigstellung der Straßen ergaben die Beobachtungen des Fahrzeugaufkommens, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 63,6 % drei aufeinander folgende Fahrzeuge den Kreisverkehr an der Ausfahrt in Richtung A-Stadt verlassen.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Fahrzeug den Kreisverkehr nicht an dieser Ausfahrt in Richtung A-Stadt verlässt.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

Wahlaufgabe 2

Der Gemeindeverband „Grünes Tal“ plant die Sanierung der Freibadanlage. Im Zuge des notwendig werdenden Umbaus des 50,00 m langen und 25,00 m breiten Beckens soll auch ein Sprungturm mit der Höhe 3,00 m neu entstehen. Der Absprungpunkt liegt im Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems mit der Längeneinheit 1 m (siehe Abbildung).

Aus Sicherheitsgründen muss der Beckengrund im Sprungbereich auf 4,00 m Tiefe abgesenkt werden. Im Querschnitt des Beckens wird der ursprüngliche Verlauf des Beckengrundes mittels einer Geraden durch die Punkte A und C beschrieben.

Für die Koordinaten x und y der Punkte der Sprungbahn gilt die Gleichung:

$$y = (\tan \alpha) \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cdot (\cos \alpha)^2} \cdot x^2.$$

Die Variablen haben folgende Bedeutung:

α : Absprungwinkel;

v_0 : Absprunggeschwindigkeit in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$;

g : Fallbeschleunigung in $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

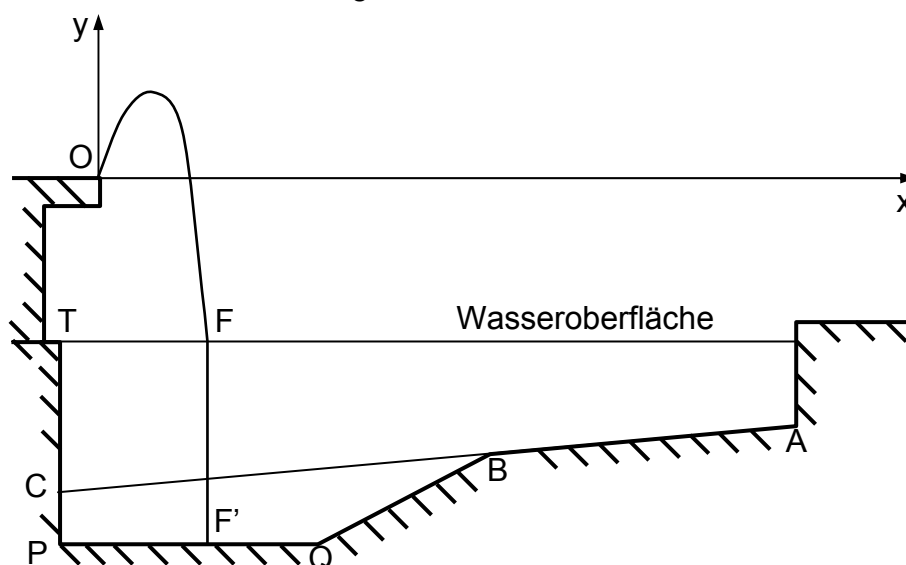


Abbildung (nicht maßstäblich)

Die Punkte haben folgende Koordinaten:

$O(0; 0)$, $A(49,00; -4,20)$, $B(24,00; -4,80)$, $P(-1,00; -7,00)$, $T(-1,00; -3,00)$,
 $C(-1,00; y_C)$, $Q(x_Q; -7,00)$, $F(x_F; -3,00)$, $F'(x_F; -7,00)$

F ist der Eintauchpunkt des Springers in das Wasser, F' der dazugehörige Lotfußpunkt auf dem Beckengrund.

Fortsetzung auf Seite 7

Fortsetzung Wahlaufgabe 2

- a) Zeigen Sie, dass die Gleichung für die Punkte der Sprungbahn für $\alpha = 45^\circ$; $v_0 = 5,0$ und $g = 9,81$ in die Gleichung $y = x - 0,3924 x^2$ übergeht.

Der Punkt Q bezeichnet das Ende des Sprungbereiches.

Berechnen Sie die x-Koordinate des Punktes Q, so dass $\overline{PF'} = \overline{F'Q}$ gilt.

Erreichbare BE-Anzahl: 6

- b) Das Becken wird so erweitert, dass der Punkt Q die Koordinaten $Q(9,64; -7,00)$ besitzt. Dadurch erhöhen sich die Wasserkosten.

Ermitteln Sie die durch den Umbau des Beckens zusätzlich benötigte Wassermenge in Kubikmeter sowie den prozentualen Mehrbedarf an Wasser gegenüber dem Ausgangszustand.

Erreichbare BE-Anzahl: 4