

Schriftliche Abiturprüfung – Grundkursfach – Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Vorwort.....	1
Material für den Prüfungsteilnehmer	2
Allgemeine Arbeitshinweise	2
Prüfungsinhalt.....	2
Pflichtaufgaben.....	2
Teil A: Analysis.....	2
Teil B: Geometrie / Algebra	3
Teil C: Stochastik	3
Teil D: Wahlaufgaben	4
Aufgabe D 1: Analysis	4
Aufgabe D 2: Geometrie / Algebra	5
Lösungsvorschläge.....	6
Teil A.....	6
Teil B.....	6
Teil C.....	9
Teil D1.....	10
Teil D2.....	10

Vorwort

Aus rechtlichen Gründen möchte ich Sie darauf hinweisen, dass Sie sich auf einer **privaten** Seite befinden. Insbesondere ist dies **kein** Produkt des Sächsischen Staatsministeriums für Kultus, welches die Abituraufgaben entwickelt.

Dies ist die Abschrift der Prüfungsaufgaben 2009, wie sie vom Sächsischen Staatsministeriums für Kultus auf dem Sächsischen Schulserver (www.sachsen-macht-schule.de) veröffentlicht wurden.

Außerdem sollten Sie folgendes wissen:

- Lösungen der Aufgaben können auf unterschiedlichen Wegen erreicht werden. Hier finden Sie VORSCHLÄGE zur Lösung und VORSCHLÄGE zur Bewertung, die nicht für die Bewertung Ihres Abiturs herangezogen werden können. Dafür ist jeder prüfende Fachlehrer verantwortlich.
- Ich habe versucht, den grafikfähigen Taschenrechner (GTR – hier TI 82/83/83+) besonders häufig einzusetzen. Damit sollen Möglichkeiten aufgezeigt werden, auch wenn ein \mathbb{R} Rechnung vielleicht schneller zum Ziel führen würde.
- Eingesetzte Programme finden Sie auf den Mathe-Seiten des sächsischen Schulservers unter www.sn.schule.de/~matheabi dokumentiert und anhand von vielen Beispielen erklärt. Insbesondere möchte ich auf eine zusammenfassende Broschüre zu diesem Thema verweisen: www.sn.schule.de/~matheabi/data/gtrZsfsg.pdf.
- Die **offiziellen** Abituraufgaben werden nach Beendigung der Prüfungsphase auf dem **Sächsischen Schulserver** veröffentlicht.
- Für Nachfragen und Ihre Hinweise stehe ich Ihnen gerne zur Verfügung: **F. Müller** (mathe@gymnasium-delitzsch.de) – Mathe-Lehrer.
Dieses Dokument wurde zuletzt aktualisiert am 05.05.09.
- Wenn Sie Fehler finden oder Ergänzungen haben, teilen Sie mir das bitte mit.

Material für den Prüfungsteilnehmer

Allgemeine Arbeitshinweise

Ihre Arbeitszeit (einschließlich der Zeit für das Lesen der Aufgabentexte und der Zeit für die Auswahl der Wahlaufgabe) beträgt **240 Minuten**.

Auf dem Deckblatt der Arbeit haben Sie den verwendeten GTR-Typ anzugeben.

Die Prüfungsarbeit besteht aus den zu bearbeitenden Pflichtteilen **A, B und C** sowie dem **Wahlteil D**. Es sind alle Aufgaben der Pflichtteile zu bearbeiten.

Aus dem Teil D ist **genau eine** der beiden Aufgaben zu bearbeiten.

Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionen) Hilfslinien muss deutlich erkennbar in gut lesbarer Form dargestellt werden.

Bei Verwendung von GTR-Programmen ist anzugeben, aus welchen Eingabedaten das Programm welche Ausgabedaten berechnet.

Insgesamt sind 60 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar, davon

im Teil A	25 BE,
im Teil B	15 BE,
im Teil C	10 BE,
im Teil D	10 BE.

Erlaubte Hilfsmittel:

1 Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung

1 grafikfähiger, programmierbarer Taschenrechner (GTR) ohne Computer-Algebra-System

1 Tabellen- und Formelsammlung ohne ausführliche Musterbeispiele (im Unterricht eingeführt)

Zeichengeräte

beiliegende „Materialien für Aufgaben zur Stochastik“¹

Bewertungsmaßstab

Pkte.	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Prüfungsinhalt

Pflichtaufgaben

Teil A: Analysis (für Prüfungsteilnehmer, die ein CAS benutzen)

Gegeben ist die Funktion f durch $y=f(x)=-\frac{x}{18}\cdot(x^2+18\cdot x+81)$ ($x \in \mathbb{R}$)

a) Geben Sie die Nullstellen der Funktion f an.

Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion f genau einen Wendepunkt besitzt.

Geben Sie die Koordinaten dieses Wendepunktes an.

Untersuchen Sie den Graphen der Funktion f auf Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung.

Geben Sie das Verhalten der Funktion f im Unendlichen an.

Erreichbare BE-Anzahl: 7

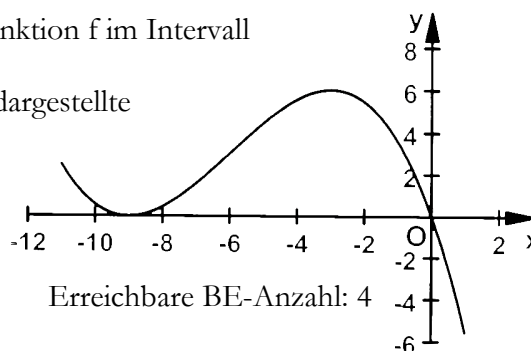
¹ Diese werden hier nicht wiedergegeben. Sie enthalten zumeist eine Tabelle zur Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Manchmal eine Tabelle zur Summenfunktion der Binomialverteilung. Beides kann durch Verwendung des GTR leicht ersetzt werden. Die Tabellen finden Sie im Inhalt der Online-Ausgabe dieses Textes www.sn.schule.de/~matheabi.

- b) Durch die beiden lokalen Extrempunkte des Graphen der Funktion f verläuft die Gerade g . Der Graph von f und die Gerade g schließen zwei Flächen vollständig ein. Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden g . Berechnen Sie das Verhältnis der Inhalte dieser beiden Flächen. Erreichbare BE-Anzahl: 5
- c) Die Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt $Q(a \mid f(a))$ ($a \in \mathbb{R}$, $-9 < a < -3$) schneidet die y -Achse im Punkt P . Die Punkte P und Q sowie der Koordinatenursprung O bilden ein Dreieck. Bestimmen Sie den Wert für a so, dass der Flächeninhalt des Dreiecks OPQ maximal wird. Geben Sie den maximalen Flächeninhalt an. Erreichbare BE-Anzahl: 5
- d) Die x -Achse und der Graph der ersten Ableitungsfunktion von f begrenzen eine Fläche A_1 vollständig. Es gibt Geraden mit der Gleichung $x = k$ ($k \in \mathbb{R}$), die mit der x -Achse und dem Graphen der ersten Ableitungsfunktion von f eine Fläche A_2 vollständig begrenzen. Berechnen Sie einen Wert für k , so dass die Flächen A_1 und A_2 den gleichen Inhalt besitzen. Erreichbare BE-Anzahl: 4

- e) Die nebenstehende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f im Intervall $-11 < x < 1$.

Treffen Sie unter Verwendung dieser Abbildung für das dargestellte Intervall begründete Aussagen

- über das Vorzeichen der Funktionswerte der ersten Ableitungsfunktion f' der Funktion f für $-3 < x < 1$,
- über die Existenz einer lokalen Maximumstelle der ersten Ableitungsfunktion f' der Funktion f .



Teil A: Analysis (für Prüfungsteilnehmer, die kein CAS benutzen)

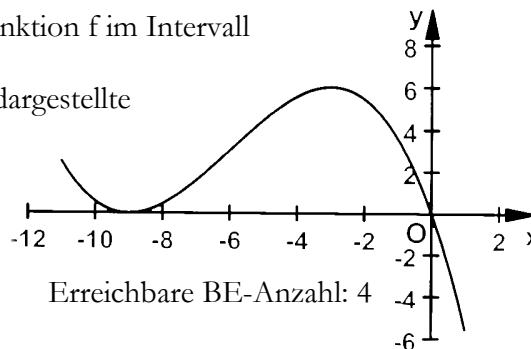
Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = -\frac{x}{18} \cdot (x^2 + 18 \cdot x + 81)$ ($x \in \mathbb{R}$)

- a) Geben Sie die Nullstellen der Funktion f an. Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion f genau einen Wendepunkt besitzt. Geben Sie die Koordinaten dieses Wendepunktes an. Untersuchen Sie den Graphen der Funktion f auf Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung. Geben Sie das Verhalten der Funktion f im Unendlichen an. Erreichbare BE-Anzahl: 8
- b) Durch die beiden lokalen Extrempunkte des Graphen der Funktion f verläuft die Gerade g . Der Graph von f und die Gerade g schließen zwei Flächen vollständig ein. Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden g . Berechnen Sie unter Verwendung des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung den Inhalt einer dieser beiden Flächen. Berechnen Sie das Verhältnis der Inhalte dieser beiden Flächen. Erreichbare BE-Anzahl: 7

- c) Die nebenstehende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f im Intervall $-11 < x < 1$.

Treffen Sie unter Verwendung dieser Abbildung für das dargestellte Intervall begründete Aussagen

- über das Vorzeichen der Funktionswerte der ersten Ableitungsfunktion f' der Funktion f für $-3 < x < 1$,
- über die Existenz einer lokalen Maximumstelle der ersten Ableitungsfunktion f' der Funktion f .



- d) Die Tangente t_a an den Graphen der Funktion f im Punkt $Q(a \mid f(a))$ ($a \in \mathbb{R}$, $-9 < a < -3$) schneidet die y -Achse im Punkt P . Die Punkte P und Q sowie der Koordinatenursprung O bilden ein Dreieck.

Zeigen Sie, dass die Tangente t_a durch die Gleichung $t_a(x) = \left(-\frac{a^2}{6} - 2 \cdot a - \frac{9}{2}\right) \cdot x + \frac{a^3}{9} + a^2$ ($x \in \mathbb{R}$)

beschrieben werden kann.

Bestimmen Sie den Wert für a so, dass der Anstieg der Tangente t_a den Wert 1,5 hat.

Ermitteln Sie für diesen Wert a den zugehörigen Flächeninhalt des Dreiecks OPQ .

Erreichbare BE-Anzahl: 6

Teil B: Geometrie / Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(5 \mid -3 \mid 0)$, $B(7 \mid 1 \mid 5)$ und $C(-2 \mid 0 \mid 1)$ gegeben.

- a) Nennen Sie ein Kriterium, welches ein beliebiger Punkt P erfüllen muss, damit die Punkte A , B und P eindeutig eine Ebene bestimmen.

Weisen Sie nach, dass der Punkt C dieses Kriterium erfüllt.

Geben Sie eine Gleichung der Ebene an, die durch die Punkte A , B und C bestimmt wird.

Ermitteln Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC .

Erreichbare BE-Anzahl: 5

- b) Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes D so, dass das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm ist.

Begründen Sie, dass das Viereck $ABCD$ kein Rechteck ist.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

- c) Durch den Schnittpunkt M der Diagonalen des Parallelogramms $ABCD$ sowie den Richtungsvektor

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -11 \\ -37 \\ 34 \end{pmatrix} \text{ wird eine Gerade } h \text{ eindeutig bestimmt.}$$

Ein Punkt S , der auf der Geraden h liegt, ist die Spitze einer geraden Pyramide mit dem Parallelogramm $ABCD$ als Grundfläche. Der Abstand vom Punkt S zum Schnittpunkt M beträgt $\sqrt{294}$.

Ermitteln Sie die Koordinaten eines solchen Punktes S .

Berechnen Sie das Volumen der Pyramide.

Die Pyramide wird in einer Höhe von $\frac{\sqrt{294}}{2}$ von einer Ebene geschnitten, die parallel zur

Grundfläche $ABCD$ verläuft. Dabei entstehen zwei Teilkörper.

Ermitteln Sie das Verhältnis der Volumina dieser beiden Teilkörper.

Erreichbare BE-Anzahl: 7

Teil C: Stochastik

Erfahrungsgemäß buchen 12 % der Kunden eines Reiseveranstalters eine Individualreise.

- a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

Ereignis A: Von den nächsten 125 Kunden dieses Reiseveranstalters buchen höchstens 14 eine Individualreise.

Ereignis B: Von den nächsten 125 Kunden dieses Reiseveranstalters buchen mehr als sechs und weniger als 12 eine Individualreise.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

- b) Berechnen Sie die Mindestanzahl der Kunden dieses Reiseveranstalters pro Tag, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens eine Individualreise pro Tag gebucht wird.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

Der Reiseveranstalter bietet in seinem aktuellen Sommerkatalog für 2009 Kalabrien als neues Reiseziel an.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Besitzer dieses Katalogs auf dieses Angebot aufmerksam wird, sei p .

Genau 5 % dieser Personen buchen diese Reise.

- c) Ermitteln Sie, wie groß p sein muss, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Besitzer dieses Kataloges auf die Reise nach Kalabrien aufmerksam wird und diese auch bucht, größer als 2 % ist.
Erreichbare BE-Anzahl: 2
- d) Eine Pauschalreise dieses Reiseveranstalters nach Kalabrien kostet 820 € pro Person und Woche und bringt dem Veranstalter einen Gewinn von 77 €. Durch Baulärm in einer benachbarten Ferienanlage wird in der nächsten Saison bei einem Teil der Reisenden mit Rückforderungen in Höhe von 15 % des Reisepreises gerechnet.
Berechnen Sie, wie viel Prozent der Reisenden höchstens Rückforderungen stellen dürfen, damit der Veranstalter bei diesem Angebot keinen Verlust macht. Erreichbare BE-Anzahl: 3

Teil D: Wahlaufgaben

Wählen Sie genau eine der folgenden Aufgaben zur Bearbeitung aus.

Aufgabe D 1:

Skate-Rampen werden in verschiedenen Größen hergestellt.

In der Abbildung ist der Querschnitt einer Quarterpipe dargestellt (alle Angaben in cm), über den ein kartesisches Koordinatensystem mit dem Koordinatenursprung O (1 Einheit entspricht 1 Zentimeter) gelegt wurde.

In diesem Koordinatensystem kann der Schnitt der geklirrnten Fahrfläche mit der x-y-Koordinatenebene in guter Näherung durch den Graphen der Funktion f mit

$y = f(x) = 3,791 \cdot 10^{-6} x^3 + 4,072 \cdot 10^{-3} x^2 - 1,137 x + 105,0$ ($x \in \mathbb{R}; 0,0 \leq x \leq 190,0$) beschrieben werden. Sowohl die Gesamtlänge als auch die Gesamtbreite der Quarterpipe betragen je 250,0 cm.

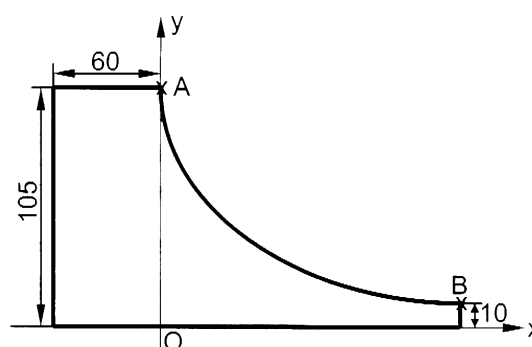


Abbildung 1: (nicht maßstäblich)

- a) Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion f näherungsweise durch die auf dem Schnitt der geklirrnten Fahrfläche mit der x-y-Koordinatenebene liegenden Punkte A und B (siehe Abbildung) verläuft. Erreichbare BE-Anzahl: 1
- b) Zwei Quarterpipes können zu einer Halfpipe verbunden werden, wenn ein tangentialer Übergang parallel zur Horizontalen vorhanden ist.
Überprüfen Sie, ob diese Bedingung bei der beschriebenen Quarterpipe erfüllt ist.
Erreichbare BE-Anzahl: 2
- c) Die Quarterpipes werden aus Leichtbeton Dichte $\left(\text{Dichte: } \rho \approx 1,8 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \right)$ hergestellt.
Ermitteln Sie die Masse einer solchen Quarterpipe. Erreichbare BE-Anzahl: 4
- d) Als Belag für die geklirrnte Fahrfläche werden Siebdruckplatten verwendet.
Ermitteln Sie, welchen Materialpreis der Hersteller dafür kalkulieren muss, wenn ein Quadratmeter dieses Materials 9,50 € kostet.
Hinweis: Für die Länge s des Graphen der Funktion f über dem Intervall $a \leq x \leq b$ gilt:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Erreichbare BE-Anzahl: 3

Aufgabe D 2:

Die Lage zweier Grundstücke wird im Folgenden in einem kartesischen Koordinatensystem (1 Einheit entspricht 1 Meter) innerhalb der x-y-Koordinatenebene beschrieben.

Die geradlinige Grenze zwischen den beiden Grundstücken verläuft durch die Punkte $P(20,0 \mid 0,0 \mid 0,0)$ und $Q(0,0 \mid 40,0 \mid 0,0)$. Die positive x-Achse zeigt dabei nach Süden und die positive y-Achse nach Osten.

In einem der beiden Grundstücke steht senkrecht zur x-y-Koordinatenebene ein 7,0 m hoher Mast mit dem Fußpunkt $F(16,0 \mid 19,0 \mid 0,0)$.

Hinweis: Die Dicke des Mastes wird vernachlässigt.

- a) Die Nachbarn wollen den Abstand des Fußpunktes F zur Grundstücksgrenze bestimmen. Dazu wählt der eine Nachbar den Messpunkt $A(11,6 \mid 16,8 \mid 0,0)$ und der andere Nachbar den Messpunkt $B(12,0 \mid 16,0 \mid 0,0)$.
Weisen Sie nach, dass sich die beiden Punkte A und B auf der Grundstücksgrenze befinden.
Geben Sie die beiden gemessenen Entfernungen an.
Untersuchen Sie, ob eine der beiden Messungen dem Abstand des Fußpunktes zur Grundstücksgrenze entspricht. Erreichbare BE-Anzahl: 4
- b) Zu einem bestimmten Zeitpunkt kommen die Sonnenstrahlen aus Süden und der Schatten des Mastes endet auf der Grundstücksgrenze.
Ermitteln Sie einen Näherungswert für die Größe des Winkels, unter dem die Sonnenstrahlen zu diesem Zeitpunkt gegenüber der x-y-Koordinatenebene einfallen. Erreichbare BE-Anzahl: 3
- c) Ein Nachbar befürchtet, dass der Mast im Fußpunkt umknicken könnte.
Ermitteln Sie einen Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit, mit der der Mast beim Umfallen die Grundstücksgrenze erreicht.
Hinweis: Alle Fallrichtungen werden als gleichwahrscheinlich angenommen. Erreichbare BE-Anzahl: 3

Lösungsvorschläge

Teil A

- a) Nullstellen
 Ansatz für Koordinaten des Wendepunktes
 Nachweis der hinreichenden Bedingung
 Koordinaten des Wendepunktes W: $W(-6 \mid 3)$
 Untersuchung auf Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung (2 BE)
 Verhalten im Unendlichen 7 BE
- b) Koordinaten der lokalen Extrempunkte (2 BE)
 eine Gleichung der Geraden g
 Ansatz für Verhältnis der Flächeninhalte
 Verhältnis der Flächeninhalte: $A_1/A_2 = 1/1$ 5 BE
- c) Anstieg der Tangente an der Stelle $x = a$: $mt = -a^2/6 - 2a - 4.5$
 Achsenabschnitt der Tangente: $nt = a^3/9 + a^2$
 Zielfunktion
 Wert für a: $a = -6,75$
 maximaler Flächeninhalt: $A \approx 38,4$ 5 BE
- d) Ansatz für Flächeninhalt A_1
 Flächeninhalt A_1 : $A_1 = 6$
 Ansatz für einen Wert für k
 ein Wert für k: $k_1 = -12$ oder $k_2 = 0$ 4 BE
- e) Aussagen (2 BE)
 Begründungen (2 BE) 4 BE

Teil A (kein CAS)

- a) Nullstellen
 erste Ableitungsfunktion
 zweite Ableitungsfunktion
 Nachweis der hinreichenden Bedingung
 Koordinaten des Wendepunktes W: $W(-6 \mid 3)$
 Untersuchung auf Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung (2 BE)
 Verhalten im Unendlichen 8 BE
- b) Koordinaten der lokalen Extrempunkte (2 BE)
 eine Gleichung der Geraden g
 Angabe der Integrationsgrenzen
 eine Stammfunktion
 Inhalt einer Fläche: z. B. $A_1 = 9/8$
 Verhältnis der Flächeninhalte: $A_1/A_2 = 1/1$ 7 BE
- c) Aussagen (2 BE)
 Begründungen (2 BE) 4 BE
- d) Nachweis des Anstiegs der Tangente
 Nachweis des Achsenabschnitts der Tangente
 Ansatz für Wert a
 Wert für a: $a = -6$
 Ansatz für Flächeninhalt
 Flächeninhalt: $A = 36$ 6 BE

Teil B

- a) ein Kriterium
 Nachweis für Punkt C
 eine Gleichung der Ebene: z. B. $-11x - 37y + 34z = 56$
 Ansatz für Flächeninhalt
 Flächeninhalt: $A = 10,5 \sqrt{6}$ 5 BE
- b) Ansatz für die Koordinaten des Punktes D
 Koordinaten des Punktes D: $D(-4 \mid -4 \mid -4)$
 Begründung 3 BE
- c) Koordinaten des Punktes M
 Ansatz für Koordinaten eines Punktes S
 Koordinaten eines Punktes S: $S_1 \left(-\frac{13}{6} \mid -\frac{83}{6} \mid \frac{71}{6} \right)$ oder $S_2 \left(-\frac{31}{6} \mid \frac{65}{6} \mid -\frac{65}{6} \right)$
 Ansatz für Volumen der Pyramide
 Volumen der Pyramide: $V=294$
 Ansatz für Verhältnis
 Verhältnis: z. B. $1 : 7$ 7 BE

Teil C

- a) Charakterisierung der Zufallsgröße
 Wahrscheinlichkeit für Ereignis A: $P(A) \approx 0,4590$
 Wahrscheinlichkeit für Ereignis B: $P(B) \approx 0,1627$ 3 BE
- b) Ansatz
 Ergebnis: mindestens 24 Kunden 2 BE
- c) Ansatz für Wert für p
 Werte für p: $p > 0,4$ 2 BE
- d) Ansatz für prozentualen Anteil (2 BE)
 prozentualer Anteil: 62,60% 3 BE

Teil D1

- a) vollständiger Nachweis 1 BE
- b) Ansatz
 Schlussfolgerung: Die Bedingung ist annähernd erfüllt. 2 BE
- c) Ansatz für Flächeninhalt der Querschnittsfläche
 Flächeninhalt der Querschnittsfläche
 Ansatz für Masse der Rampe
 Masse der Rampe: $m \approx 6,21t$ 4 BE
- d) Länge der Begrenzungslinie
 Flächeninhalt der Fahrfläche in Quadratmetern
 Materialpreis: z. B. 52,15€ 3 BE

Teil D2

- a) Nachweis für Lage der Punkte
 Entfernungen der Punkte A und B zum Fußpunkt: $\overline{AF} \approx 4,9m$ bzw. $\overline{BF} = 5,0m$
 Untersuchung und Entscheidung (2 BE) 4 BE
- b) Ansatz für Größe des Winkels α (2 BE)
 Größe des Winkels α : $\alpha \approx 51,8^\circ$ 3 BE

c) Ansatz für Größe eines Winkels

Größe eines Winkels: z. B. $\beta \approx 90,7^\circ$

Wahrscheinlichkeit: $p \approx 0,2519$

3 BE