Schriftliche Abiturprüfung – Leistungskursfach – Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Aus rechtlichen Gründen möchte ich Sie darauf hinweisen, dass Sie sich auf einer **privaten** Seite befinden. Insbesondere ist dies **kein** Produkt des Sächsischen Staatsministeriums für Kultus, welches die Abituraufgaben entwickelt.

Dies ist die Abschrift der Prüfungsaufgaben 2009, wie sie vom Sächsischen Staatsministeriums für Kultus auf dem Sächsischen Schulserver (www.sachsen-macht-schule.de) veröffentlicht wurden.

Außerdem sollten Sie folgendes wissen:

- Lösungen der Aufgaben können auf unterschiedlichen Wegen erreicht werden. Hier finden Sie VORSCHLÄGE zur Lösung und VORSCHLÄGE zur Bewertung, die nicht für die Bewertung Ihres Abiturs herangezogen werden können. Dafür ist jeder prüfende Fachlehrer verantwortlich.
- Ich habe versucht, den graphikfähigen Taschenrechner (GTR – hier TI 82/83/83+ bzw. CAS – hier TI 89) besonders häufig einzusetzen.
- Eingesetzte Programme finden Sie auf den Mathe-Seiten des sächsischen Schulservers unter www.sn.schule.de/~matheabi dokumentiert und anhand von vielen Beispielen erklärt. Insbesondere möchte ich auf eine zusammenfassende Broschüre zu diesem Thema verweisen: www.sn.schule.de/~matheabi/data/gtrZsfsg.pdf.
- Die **offiziellen** Abituraufgaben werden nach Beendigung der Prüfungsphase auf dem Sächsischen Schulserver veröffentlicht.
- Für Nachfragen und Ihre Hinweise stehe ich Ihnen gerne zur Verfügung: F. Müller (mathe@gymnasium-delitzsch.de) – Mathe-Lehrer.
  Dieses Dokument wurde zuletzt aktualisiert am 12.02.10.
- Wenn Sie Fehler finden oder Ergänzungen haben, teilen Sie mir das bitte mit.

Material für den Prüfungsteilnehmer

Allgemeine Arbeitshinweise

Ihre Arbeitszeit (einschließlich der Zeit für das Lesen der Aufgabentexte und der Zeit für die Auswahl der Wahlaufgabe) beträgt **300 Minuten.**
Auf dem Deckblatt der Arbeit haben Sie den verwendeten GTR-Typ anzugeben.
Die Prüfungsarbeit besteht aus den zu bearbeitenden **Pflichtteilen A**, **B** und **C** sowie dem **Wahlteil D**.
Es sind alle Aufgaben der Pflichtteile zu bearbeiten.
Aus dem Teil D ist **genau eine** der beiden Wahlaufgaben zu bearbeiten.
Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionen) Hilfslinien muss deutlich erkennbar in gut lesbarer Form dargestellt werden.
Insgesamt sind 60 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar, davon
im Teil A 25 BE,
im Teil B 15 BE,
im Teil C 10 BE,
im Teil D 10 BE.
Erlaubte Hilfsmittel:
- Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung
- grafikfähiger, programmierbarer Taschenrechner mit oder ohne Computer-Algebra-System (CAS) bzw. ein CAS auf der Grundlage einer anderen Plattform entsprechend der getroffenen Festlegung an der Schule
- Tabellen- und Formelsammlung (im Unterricht eingeführt, ohne ausführliche Musterbeispiele)
- Zeichengeräte

Bewertungsmaßstab

Pkte.	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
60 BE	60-58	57-55	54-52	51-49	48-46	45-43	42-40	39-37	36-34	33-31	30-28	27-25	24-21	20-17	16-13	12-0

Prüfungsinhalt

Pflichtaufgaben

Teil A: Analysis (für Prüfungsteilnehmer, die ein CAS benutzen)

Für jede reelle Zahl k (k > 0) ist eine Funktion f_k durch $f_k(x)=\frac{1}{2}x^3-2kx^2+2k^2x \quad x\in\mathbb{R}$ definiert.

Der Graph der Funktion f_k besitzt genau zwei lokale Extrempunkte.

a) Geben Sie die Nullstellen der Funktion f_k an.
Die lokalen Minimumpunkte aller Graphen der Funktion f_k liegen auf dem Graphen der Funktion g und die lokalen Maximumpunkte aller Graphen der Funktion f_k liegen auf dem Graphen der Funktion h.
Ermitteln Sie je eine Gleichung der Funktionen g und h. Erreichbare BE-Anzahl: 6

b) Weisen Sie nach, dass die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen der Funktion f_k das arithmetische Mittel der entsprechenden Koordinaten der beiden lokalen Extrempunkte des Graphen der Funktion f_k sind.
Der Graph der Funktion v_k mit $v_k(x)=f_k(x+a)+b$ ($x\in\mathbb{R}$) mit $a\in\mathbb{R}$; $b\in\mathbb{R}$ $a \neq 0$ $b \neq 0$ entsteht durch Verschiebung des Graphen der Funktion f_k.
Geben Sie die Werte für a und b so an, dass der Wendepunkt des Graphen von v_k im Koordinatenursprung liegt. Erreichbare BE-Anzahl: 4

c) Der Graph der Funktion f_3 schließt mit der Abszissenachse eine Fläche vollständig ein. Durch den lokalen Maximumpunkt des Graphen der Funktion f_3 verläuft eine Gerade i, die den Inhalt dieser Fläche halbiert.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der Geraden i mit der Abszissenachse.
Erreichbare BE-Anzahl: 5

d) Der Graph einer quadratischen Funktion verläuft durch den Koordinatenursprung und wird im Punkt $Q(2 \mid f_3(2))$ von einer Parallelen zur Abszissenachse berührt.
Zeigen Sie, dass die Funktion q mit $q(x) = -4x^2 + 16x$ ($x \in \mathbb{R}$) diese Bedingungen erfüllt.
Der Graph von q schneidet die Abszissenachse in einem Punkt $A(x \mid 0)$ mit $x > 0$.
Auf dem Graphen der Funktion f_3 existiert genau ein Punkt B, so dass der Abstand von A zu B kleinstmöglich ist.
Ermitteln Sie grafisch Näherungswerte für die Koordinaten des Punktes B.
Erreichbare BE-Anzahl: 6

e) Weisen Sie nach, dass folgende Aussage wahr ist: „Für jede ganzrationale Funktion dritten Grades gilt: Wenn der Wendepunkt des Graphen dieser Funktion im Koordinatenursprung liegt, dann ist der Graph dieser Funktion punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung."
Erreichbare BE-Anzahl: 4

Teil A: (für Prüfungsteilnehmer, die kein CAS benutzen)

Für jede reelle Zahl k ($k > 0$) ist eine Funktion f_k durch $f_k(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2kx^2 + 2k^2x$ $x \in \mathbb{R}$ definiert.

Der Graph der Funktion f_k besitzt genau zwei lokale Extrempunkte.

a) *Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f_k.*
Zeigen Sie, dass die lokalen Extrempunkte des Graphen der Funktion f_k die Koordinaten $P_{E_1}(2 \cdot k \mid 0)$ *und* $P_{E_1}\left(\frac{2}{3} \cdot k \,\middle|\, \frac{16}{27}k^3\right)$ *besitzen.*
Weisen Sie die Art dieser Extrempunkte nach. Erreichbare BE-Anzahl: 6

b) *Die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen der Funktion f_k sind das arithmetische Mittel der entsprechenden Koordinaten der beiden lokalen Extrempunkte des Graphen der Funktion f_k.*
Geben Sie die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen von f_k aufgrund dieser Aussage an.
Der Graph der Funktion v_k mit $v_k(x) = f_k(x + a) + b$ ($x \in \mathbb{R}$) mit $a \in \mathbb{R}$; $b \in \mathbb{R}$ $a \neq 0$ $b \neq 0$ entsteht durch Verschiebung des Graphen der Funktion f_k.
Geben Sie die Werte für a und b so an, dass der Wendepunkt des Graphen von v_k im Koordinatenursprung liegt. Erreichbare BE-Anzahl: *3*

c) Der Graph der Funktion f_3 schließt mit der Abszissenachse eine Fläche vollständig ein. Durch den lokalen Maximumpunkt des Graphen der Funktion f_3 verläuft eine Gerade i, die den Inhalt dieser Fläche halbiert.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der Geraden i mit der Abszissenachse.
Erreichbare BE-Anzahl: *6*

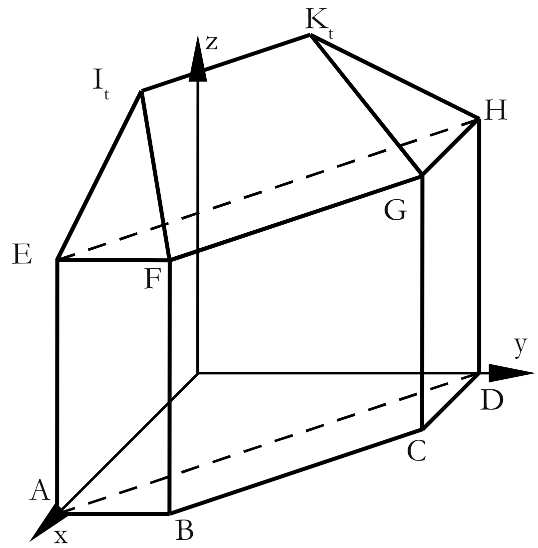
d) Der Graph einer quadratischen Funktion verläuft durch den Koordinatenursprung und wird im Punkt $Q(2 \mid f_3(2))$ von einer Parallelen zur Abszissenachse berührt.
Zeigen Sie, dass die Funktion q mit $q(x) = -4x^2 + 16x$ ($x \in \mathbb{R}$) diese Bedingungen erfüllt.
Der Graph von q schneidet die Abszissenachse in einem Punkt $A(x \mid 0)$ mit $x > 0$.
Auf dem Graphen der Funktion f_3 existiert genau ein Punkt B, so dass der Abstand von A zu B kleinstmöglich ist.
Ermitteln Sie grafisch Näherungswerte für die Koordinaten des Punktes B.
Erreichbare BE-Anzahl: 6

e) Weisen Sie nach, dass folgende Aussage wahr ist: „Für jede ganzrationale Funktion dritten Grades gilt: Wenn der Wendepunkt des Graphen dieser Funktion im Koordinatenursprung liegt, dann ist der Graph dieser Funktion punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung."

Erreichbare BE-Anzahl: 4

Teil B: Geometrie /Algebra

Zeichnung 1: Zeichnung nicht maßstäblich



Die Schüler einer Arbeitsgemeinschaft benötigen für das Bühnenbild ihrer Theateraufführung einen Körper in Form eines Teils einer Hausfassade. Dieser allseitig geschlossene Körper $ABCDEFGHI_tK_t$ wurde durch die Schüler in einem kartesischen Koordinatensystem mit dem Koordinatenursprung O in nebenstehender Abbildung dargestellt (1 Längeneinheit entspricht 1,00 m).
Für die Koordinaten der Eckpunkte gilt:
$A(3 \mid 0 \mid 0)$, $B(3 \mid 1 \mid 0)$, $C(1 \mid 3 \mid 0)$, $D(0 \mid 3 \mid 0)$,
$I_t(1 \mid 0 \mid t)$, $K_t(0 \mid 1 \mid t)$.
Der Wert t ($t \in \mathbb{R}$, $t > 3$) variiert dabei die Neigungen der Dachschrägen.
Die Eckpunkte E, F, G und H liegen bezüglich der x-y-Koordinatenebene 3,00 m senkrecht über den Punkten A, B, C und D.

a) Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene ε_1, in der die Fläche ADHE liegt.
Zeigen Sie, dass für keinen Wert für t der Punkt I_t in der Ebene ε_1 liegt.
Der Körper $ABCDEFGHI_tK_t$ ist symmetrisch bezüglich einer Ebene ε_2.
Geben Sie eine Gleichung von ε_2 an. Erreichbare BE-Anzahl: 4

b) Begründen Sie, dass das Dreieck EFI_t für jeden Wert von t rechtwinklig ist.
Ermitteln Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks in Abhängigkeit von t. Erreichbare BE-Anzahl: 4

c) Die Dachfläche EFK_tI_t liegt in der Ebene mit der Gleichung $(t-3)\cdot x + (t+3)\cdot y + 3\cdot z = 4t - 3$ ($t \in \mathbb{R}$, $t > 3$).
Berechnen Sie die Höhe des Körpers $ABCDEFGHI_tK_t$, wenn die Dachfläche EFK_tI_t im Winkel von 45° zur Fläche EFGH geneigt ist. Erreichbare BE-Anzahl: 3

d) Auf der Kante $\overline{GK_5}$ liegt ein Punkt Q, in dem eine Kabelbefestigung angebracht werden soll.
Vom Punkt H aus soll jeweils linear ein Kabel an der Dachinnenseite über den Punkt Q zum Diagonalenschnittpunkt $L\left(1 \middle| 1 \middle| \frac{13}{3}\right)$ der Dachfläche FGK_5I_5 geführt werden.
Bestimmen Sie Näherungswerte für die Koordinaten des Punktes Q, so dass die Länge des Kabels minimal ist. Erreichbare BE-Anzahl: 4

Teil C: Stochastik

Steckspiele bieten eine gute Möglichkeit, die Feinmotorik von Kleinkindern zu entwickeln.

a) Steckspiele werden überwiegend importiert. Der Transport erfolgt mit Containerschiffen. In einem Container mit 1 000 Steckspielen erwartet man aus Erfahrung genau zwei Spiele mit Transportschaden.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle Spiele eines zufällig ausgewählten Containers ohne Transportschaden sind. Erreichbare BE-Anzahl: 2

Die Steckspiele eines Spielwarengroßhändlers stammen entweder aus inländischer Produktion oder werden importiert.
Kontrollen ergaben, dass 75 % der importierten Spiele nicht den geforderten Standards entsprechen, bei den inländischen sind es nur 1 %.

b) Der Importanteil beträgt 95 %.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewähltes Steckspiel, das nicht den geforderten Standards entspricht, importiert wurde. Erreichbare BE-Anzahl: 2

c) Der Großhändler will den Importanteil bei den Steckspielen so verändern, dass höchstens noch 10 % der Steckspiele nicht den geforderten Standards entsprechen.
Berechnen Sie den maximalen Importanteil der Spiele für diese Bedingung.
Erreichbare BE-Anzahl: 3

Ein bestimmtes Steckspiel für Kleinkinder besteht aus einem Behälter mit sechs verschiedenen Öffnungen und aus sechs verschiedenen geometrischen Körpern, wobei sich jeder dieser Körper durch genau eine der Öffnungen in den Behälter stecken lässt.
Für die sechs einfarbigen geometrischen Körper werden fünf Farben so verwendet, dass genau zwei Körper gleichfarbig sind und alle anderen unterschiedliche Farben haben.

d) Ein Kleinkind nimmt zufällig aus einem solchen Steckspiel nacheinander alle Körper und steckt sie in die entsprechenden Öffnungen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Kind die beiden gleichfarbigen Körper unmittelbar nacheinander einsteckt. Erreichbare BE-Anzahl: 2

e) Geben Sie die Anzahl der möglichen Farbgestaltungen der geometrischen Körper für ein solches Spiel an. Erreichbare BE-Anzahl: 1

Teil D: Wahlaufgaben

Wählen Sie genau eine der folgenden Aufgaben zur Bearbeitung aus.

Aufgabe D 1: Analysis

An einem Sommertag entnimmt Sophia dem Kühlschrank einen Krug mit Orangensaft.

a) Der Erwärmungsvorgang des Saftes kann durch die Gleichung $\vartheta(t) = a - b\mathrm{e}^{-ct}$ beschrieben werden.
Dabei bedeuten:
ϑ … Temperatur des Orangensaftes in °C,
t … Erwärmungszeit in Minuten,
e … Euler'sche Zahl,
a, b, c … physikalische Konstanten in den jeweils erforderlichen Einheiten.
Der Saft erwärmt sich bei einer Zimmertemperatur von 25,0 °C innerhalb der ersten 20 Minuten von 10,0 °C auf 16,0 °C. Während des Erwärmungsprozesses kommt die Temperatur des Saftes nach genügend langer Zeit der Zimmertemperatur beliebig nahe.
Ermitteln Sie unter den gegebenen Bedingungen, nach wie vielen Minuten der Saft eine Temperatur von 23,0 °C erreicht hat. Erreichbare BE-Anzahl: 4

Der 18,0 cm hohe Krug hat die Form eines Rotationskörpers. Die Wandstärke des Kruges sei vernachlässigbar.
Sophia ermittelt beginnend vom Boden mit einem Faden in bestimmten Höhen den Umfang des Kruges. Sie erhält folgende Werte:

Höhe in mm	0	60	120	180
Umfang in mm	302	346	195	302

b) Die Randkurve des Kruges wird durch den Graphen einer ganzrationalen Funktion dritten Grades beschrieben.
Bestimmen Sie, wie viele Liter Flüssigkeit näherungsweise in den Krug passen.
Wird der Krug mit einem Liter Flüssigkeit gefüllt, soll der Flüssigkeitsstand einen Eichstrich erreichen.
Ermitteln Sie, in welcher Höhe Sophia diesen Eichstrich anbringen muss. Erreichbare BE-Anzahl: 6

Aufgabe D 2: Geometrie / Algebra

Für ein Schulfest wird eine Zielscheibe hergestellt.
Auf eine quadratische Grundplatte mit dem Flächeninhalt 1 m² wird dazu ein Blumenmotiv folgendermaßen aufgezeichnet: Auf die Grundplatte wird ein Koordinatensystem so gelegt, dass der Koordinatenursprung im Mittelpunkt der Platte liegt und die Koordinatenachsen parallel zu den Quadratseiten verlaufen (1 Einheit entspricht 1 dm).

In diesem Koordinatensystem sind die Funktionen $f(x)=\frac{5x}{\sqrt{1+x^2}}$ und $g(x)=\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}$ mit ($x\in\mathbb{R}$, $-5 < x < 5$) gegeben.
Spiegelt man die Graphen der Funktionen f und g an der Abszissenachse erhält man die Graphen der Funktionen $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$.
Die Graphen der Funktionen f, g, $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ schließen ein Blütenmotiv mit vier zueinander kongruenten Blütenblättern ein.

a) Geben Sie eine Gleichung der Funktion $\tilde{f}$ an. Erreichbare BE-Anzahl: 1

Es wird davon ausgegangen, dass bei jedem Schuss die Zielscheibe getroffen wird und alle Punkte der Zielscheibe mit gleicher Wahrscheinlichkeit getroffen werden.
Hinweis: Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Teilfläche getroffen wird, ist gleich dem Quotienten aus dem Inhalt dieser Teilfläche und dem Inhalt der Gesamtfläche.

b) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim Schießen auf die Zielscheibe das Blütenmotiv getroffen wird. Erreichbare BE-Anzahl: 3

Eines der Blütenblätter bekommt einen roten Farbanstrich, die anderen einen gelben. Der Hintergrund wird blau gefärbt.

c) Bei einem Spiel wird für einen Einsatz von 1 € höchstens zweimal auf die Zielscheibe geschossen, wobei wieder davon ausgegangen wird, dass diese bei jedem Schuss getroffen wird.
Trifft der Spieler den roten Bereich, erhält er 2 € ausgezahlt und das Spiel endet.
Trifft der Spieler den gelben Bereich, verliert er seinen Einsatz und das Spiel endet.
Trifft der Spieler im ersten Schuss den blauen Bereich, kann er das Spiel unter Rückzahlung des Einsatzes beenden oder ein zweites Mal kostenlos schießen. Trifft er dann erneut den blauen Bereich, dann erhält er seinen Einsatz von 1 € zurückgezahlt. Trifft er im zweiten Schuss den gelben oder roten Bereich, dann gelten die oben stehenden Regeln des Spiels.
Geben Sie an, welche Entscheidung beim Treffen des blauen Bereichs im ersten Schuss günstiger für den Spieler ist.
Begründen Sie Ihre Aussage. Erreichbare BE-Anzahl: 3

d) Für das Schulfest im kommenden Jahr soll die Zielscheibe so verändert werden, dass ins Innere der ursprünglichen Scheibe ein Quadrat einbeschrieben wird, dessen Eckpunkte die Seitenmitten des Ausgangsquadrates sind. Die Ecken des Ausgangsquadrates werden abgeschnitten.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei genau einem Schuss die rot gefärbte Fläche der neuen Zielscheibe getroffen wird.
Bei einem neuen Spiel wird bei einem Einsatz von 1 € nur genau ein Schuss auf die neue Zielscheibe abgegeben.
Legen Sie für dieses Spiel Auszahlungsregeln so fest, dass das Spiel fair ist.
Erreichbare BE-Anzahl: 3

Lösungsvorschläge

Teil A

a) Nullstellen: $x_{N1} = 0$; $x_{N2} = 2k$
lokale Extremstellen: CAS: `solve(dif(f(x,k),x)=0,x)`
Art der Extrema: z. B. CAS: `dif(f(x,k),x,2)|x=2k/3` ⟶ -2k ⇒ Maximum

Koordinaten der lokalen Extrempunkte: $P_{Max}\left(\frac{2}{3}k \middle| \frac{16}{27}k^3\right)$; $P_{Min}(2\cdot k|0)$

je eine Gleichung der Funktionen g und h: $y_{Min} = 0$; $y_{Max} = 2x^3$ (2 BE)

b) Nachweis (2 BE)
z. B.: $x_{aM} = 4k/3$ und `dif(f(x,k),x,2)|x=4k/3` ⟶ 0 und `dif(f(x,k),x,3)` ⟶ 3 ⇒ Wendestelle
Wert für a: $a = 4k/3$
Wert für b: $b = -8k^3/27 = -f_k(4k/3)$

c) Ansatz für Gesamtfläche: $\int_0^6 f_3(x)\,dx = 54$ CAS: `int(f(x,3),x,0,2·3)`

Inhalt der Gesamtfläche: A = 54
Inhalt einer Teilfläche: CAS: `int(f(x,3),x,0,2)` ⟶ 22
⇒ bleiben noch 5 FE für das markierte Dreieck

Ansatz für Koordinaten des Schnittpunktes: $5 = \frac{b\cdot 16}{2}$; $x = 2 + b$

Koordinaten des Schnittpunktes: P(21/8 | 0)

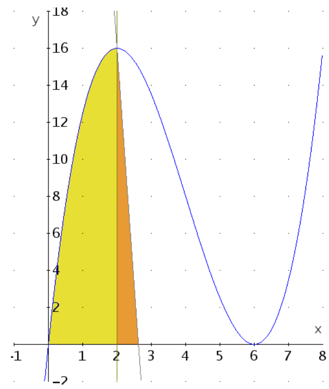


Abbildung 1: untersuchte Flächen

d) Nachweis (3 BE): $q(0) = 0$; $q(2) = f_3(2)$; $q'(2) = 0$
Zielfunktion (2 BE): A(4 | 0) ⇒ $d^2(x) = (x-4)^2 + (f_3(x) - 0)^2$
GTR: `fMin((X - 4)² + Y1²,X,4,6)` ⟶ 5.5290; $f_3(5.5290)$ ⟶ .6133
Koordinaten von B: B(5.53 | .61)

e) vollständiger Nachweis (4 BE)
z. B. notwendige Bedingung für Wendestelle
Schlussfolgerung zum Koeffizienten des quadratischen Gliedes
begründete Aussage zum Absolutglied
Schlussfolgerung zur Symmetrie

z. B.:
Vor.: $h(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit I: $h''(0) = 0$; I*: $h'''(0) \neq 0$ und II: $h(0) = 0$
Beh.: $h(-x) = -h(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$
Beweis:
$h''(x) = 6ax + 2b$ und aus I folgt $b = 0$;
aus II folgt $d = 0$, folglich ist $h(-x) = a(-x)^3 + c(-x) = -h(x)$ w.z.B.w.

Teil A – ohne CAS

a) Ansatz für Nullstellen: $f_k(x_0) = x_0\left(\frac{1}{2}x_0^2 - 2k\,x_0 + 2k^2\right) = 0$

Nullstellen: wie oben

erste Ableitungsfunktion: $f'_k(x) = \frac{3}{2}x^2 - 4k\,x + 2k^2$; $f''_k(x) = 3x - 4k$

Nachweis der lokalen Extremstellen: $f'_k(x_E) = 0$
Nachweis für Ordinaten der lokalen Extrempunkte: $y_E = f_k(x_E)$
Nachweis der Art der Extreme: $f''k(x_E) \neq 0$

b) Koordinaten des Wendepunktes: siehe oben

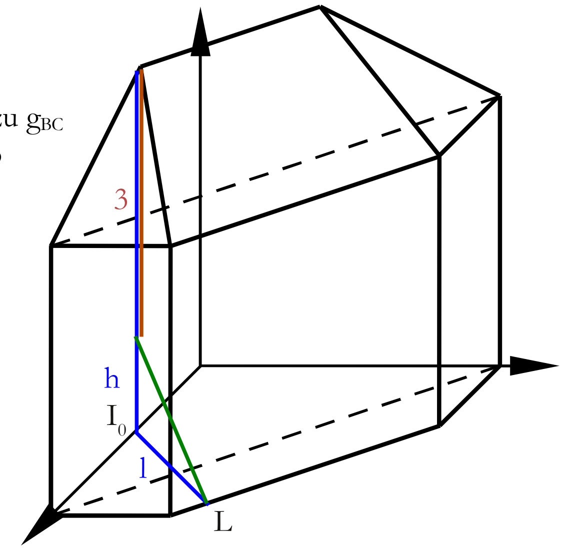
Teil B

a) Ansatz für eine Gleichung der Ebene ε_1:
eine Gleichung der Ebene ε_1: x + y = 3 ($z \in \mathbb{R}$)
Nachweis: 1 + 0 ≠ 3
eine Gleichung von ε_2: z. B. x – y = 0 ($z \in \mathbb{R}$)

b) vollständige Begründung (2 BE): $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{FI_t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ t-3 \end{pmatrix} = 0$ ⇒ Behauptung

Ansatz für Flächeninhalt: $A(t) = \frac{1}{2} \left|\overrightarrow{EF}\right| \cdot \left|\overrightarrow{FI_t}\right|$
Flächeninhalt: A = ½ $\sqrt{t^2 - 6t + 13}$

c) Ansatz für Höhe h (2 BE): z. B. vgl. mit Zeichnung
Lotfußpunkt mit GTR – prgmGeometri | Abstand I_0 zu g_{BC}
→ L(2.5 | 1.5), $\overline{I_0 L} = l = 1.5 \cdot \sqrt{2}$ und h = l ≈ 2.1213
(gleichschenkliges, rechtwinkliges Dreieck; 45°)
Höhe h: h ≈ 5.12 m



d) Ansatz für Gleichung zur Berechnung der Kabellänge:
$d(s) = \left|\overrightarrow{HQ}\right| + \left|\overrightarrow{QL}\right|$ mit
I: $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OG} + s \cdot \overrightarrow{GK_5}$ und $s \in \mathbb{R}$, 0 < s < 1 folgt
$d(s) = \left|\overrightarrow{HG} + s \cdot \overrightarrow{GK_5}\right| + \left|\overrightarrow{GL} - s \cdot \overrightarrow{GK_5}\right|$,
$d(s) = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4/3 \end{pmatrix} - s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right|$ und
d(s) = $\sqrt{9 \cdot s^2 - 2 \cdot s + 1} + \sqrt{(81 \cdot s^2 - 120 \cdot s + 52)/3}$
GTR: `fMin(…` s = 0.4304 und s in I: Q(0.5696 | 2.1392 | 3.8608)
Gleichung zur Berechnung der Kabellänge
Ansatz für Koordinaten des Punktes Q
Koordinaten des Punktes Q: Q(.57 | 2.14 | 3.86)

Teil C

a) Ansatz für Wahrscheinlichkeit: p_{defekt}=1/500
Wahrscheinlichkeit: P(X=0) ≈ .1351 = (499/500)^1000

b) Ansatz für die Wahrscheinlichkeit:
Satz von Bayes mit Zufallsgrößen: X – entspricht Standard und Y – Produktion inländisch
geg.: $P_{Y=\bar{I}}(X=\bar{S}) = .75$; $P_{Y=I}(X=\bar{S}) = .01$; P(Y=I) = .95
ges.: $P_{X=\bar{S}}(Y=\bar{I})$
Wahrscheinlichkeit: 0,9993

c) Ansatz: p ·.75 + (1 – p) ·.01 ≤ .1 ⇒ p ≤ 9/74 und p ist der Anteil importierter Wahre
funktionaler Zusammenhang
maximaler Anteil der importierten Spiele: 12,16 %

d) Ansatz für Wahrscheinlichkeit: Anordnung von 6 Elementen auf 6 Positionen: 6! Möglichkeiten;
gleichfarbige Kugeln können auf Position 1,2 oder 2,3 usw. liegen → 10 Möglichkeiten
(Vertauschung beachten); 4! Möglichkeiten die restlichen Kugeln anzuordnen ⇒ (2 ·5 ·4!)/6!
Wahrscheinlichkeit: p = 1/3

e) Anzahl der Farbgestaltungen: 1 800 = 5 Farben ·6!/2

Teil D1

a) Ansätze für Werte der Konstanten a, b und c
I: $\vartheta(0) = a - b\,e^{0} = 10$
II: $\vartheta(20) = a - b\,e^{-c\cdot 20} = 16$
III: $\lim_{t\to\infty} \vartheta(t) = a = 25$
Werte der Konstanten a, b und c: a = 25.0°C, b = 15°C, c = -ln(.6)/20 min
Ansatz für Zeit t: $23 = 25 - 15\,e^{\frac{\ln .6}{20}\cdot t}$
Zeit t: t ≈ 79 min

Hinweis: In Abhängigkeit von der gewählten Modellierung können die Ergebnisse im Aufgabenteil b) von den angegebenen Werten geringfügig abweichen.

b) Ansatz für Gleichung der Randkurve:

Höhe in mm	0	60	120	180	x bzw. L_1
Umfang in mm	302	346	195	302	
Radius in mm	48,06	55,07	31,04	48,06	y bzw. L_2

eine Gleichung der Randkurve: GTR/CAS
`QuadReg` → 5.562499590 ·10^(-5) ·x^3 - 0.01432399963 ·x^2 + 0.776 ·x + 48.06 := f(x)
Ansatz für Füllvolumen V: $\pi\cdot\int_0^{180} f^2(x)\,dx \approx 1.18234\cdot 10^6\,mm^3$
Füllvolumen V: V ≈ 1.18 l
Ansatz für Höhe h des Eichstrichs: $\pi\cdot\int_0^{h} f^2(x)\,dx = 10^6$ → h = 130.6402

c) Höhe h des Eichstrichs: h ≈ 131 mm

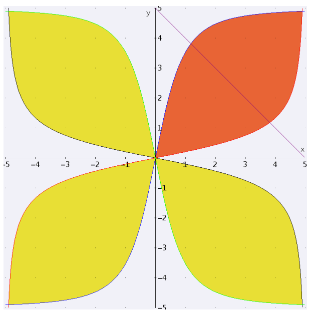
Teil D2

a) eine Gleichung von $\tilde{f}$ = -f(x)

b) Ansatz für den Flächeninhalt (z. B. Schnittstelle im I. Quadranten: $x_S = \sqrt{24}$)
GTR/CAS: `∫(ABS(f(x) - g(x)), x, 0, 2√6)` → `4·Ans(1)/100` ≈ 0.64[1]
Flächeninhalt eines Blütenblattes: A_1 = 16 dm²
Wahrscheinlichkeit für Treffer: .64

c) Entscheidung: Er sollte nach dem ersten Schuss das Spiel beenden.
Begründung (2 BE): Erwartungswert beim 2. Schuss:
E(X) = p(X=blau) ·0€ + p(X=rot) ·1€ + p(X=gelb) ·(-1€) < 0,
d. h. erwartungsgemäß Verlust beim zweiten Schuss, denn 3 gelbe Blätter stehen nur einem Roten gegenüber.

d) Inhalt der rot gefärbten Restfläche: A ≈ 7.56 dm²
z. B.: y = -x + 5; Schnittpunkte mit Graphen von f und g
A = `∫(f(x)-g(x),x,0,1.18235)+∫(5-x-g(x),x,1.18235,3.8176)`
Wahrscheinlichkeit: P(rot) ≈ .1512; P(gelb) ≈ .4536; P(blau) ≈ .3952
6€ ·.1512 + 0€ .4536 + ¼€ ·.3952 ≈ 1€
Auszahlungsregeln für ein faires Spiel:
z. B. beim Treffen des roten Bereichs: Auszahlung von 4 €
beim Treffen des gelben Bereichs: keine Auszahlung
beim Treffen des blauen Bereichs: Auszahlung von 1 €



1 Für die Annahme, dass das Blütenblatt ein Ausläufer hat (jenseits von 2√6), ergibt sich .6404