**Name:** **Datum:**

**Abstand zweier windschiefer Geraden - Grundwissen**

Gegeben sind zwei <u>windschiefe</u> Geraden g und h durch die Gleichungen $g: \vec{x} = \vec{a}_1 + r \cdot \vec{u}$ und $h: \vec{x} = \vec{a}_2 + r \cdot \vec{v}$.

Dann berechnet sich der Abstand d der Geraden g zur Geraden h durch folgendes Verfahren:

- Stelle den Term einer Hilfsebene H in Parameterform auf, die die Gerade g enthält (d.h. deren Stützvektor der Stützvektor $\vec{a}_1$ der Geraden g und deren erster Spannvektor der Richtungsvektor $\vec{u}$ der Geraden g ist) und die parallel zur Geraden h verläuft (d.h. deren zweiter Spannvektor der Richtungsvektor $\vec{v}$ der Geraden h ist): $H: \vec{x} = \vec{a}_1 + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$
- Wandle die Ebene H in die Normalenform um: $H: \vec{n} * [\vec{x} - \vec{a}_1] = 0$
- Bestimme den Abstand d eines beliebigen Punktes der Geraden h (z.B. des Startpunktes $A_2$) zu der Hilfsebene H, d.h.
  - Stelle den Term einer Hilfsgeraden k auf, die durch den Punkt $A_2$ verläuft (d.h. deren Stützvektor der Stützvektor $\vec{a}_2$ der Geraden h ist) und die orthogonal zur Hilfsebene H liegt (d.h. deren Richtungsvektor der Normalenvektor $\vec{n}$ der Hilfsebene H ist): $k: \vec{x} = \vec{a}_2 + r \cdot \vec{n}$
  - Bestimme den Schnittpunkt S der Hilfsebene H mit der Hilfsgeraden k: $\{S\} = k \cap H$
  - Berechne den Abstand d der Punkte $A_2$ und S.

Dieser Abstand d ist der Abstand der Geraden g zur Geraden h.

© 2005 Thomas Unkelbach

**Beispiel:**

Gegeben sind die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 14 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Gesucht ist der Abstand d der Geraden g zur Geraden h.

- $H: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $H: \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} * [\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}] = 0$
- $k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 14 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$
- $H \cap k: \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} * [\begin{pmatrix} 14 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}] = 0 \Leftrightarrow r = -1$, also $\vec{s} = \begin{pmatrix} 14 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$
- $\vec{s} - \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 14 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -6 \\ -7 \end{pmatrix}$, $d = \sqrt{\begin{pmatrix} -9 \\ -6 \\ -7 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -9 \\ -6 \\ -7 \end{pmatrix}} = \sqrt{81 + 36 + 49} = \sqrt{166}$

Der Abstand d der Geraden g zur Gerdaen h beträgt $\sqrt{166}$LE .