

## Abstand von Punkt und Gerade - Grundwissen



Gegeben sind eine Gerade  $g$  durch die Gleichung  $g: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{u}$  und ein Punkt  $P$  durch seinen Ortsvektor  $\vec{p}$ .

Die Berechnung des Abstandes des Punktes  $P$  und der Geraden  $g$  ist nur dann sinnvoll, wenn der Punkt nicht auf der Geraden liegt.

Dann berechnet sich der Abstand  $d$  des Punktes  $P$  zur Gerade  $g$  durch folgendes Verfahren:

- Stelle den Term einer Hilfsebene  $H$  in Normalenform auf, die durch den Punkt  $P$  verläuft (d.h. deren Stützvektor der Ortsvektor  $\vec{p}$  des Punktes  $P$  ist) und die orthogonal zur Geraden  $g$  liegt (d.h. deren Normalenvektor der Richtungsvektor  $\vec{u}$  der Geraden  $g$  ist):  $H: \vec{u} * [\vec{x} - \vec{p}] = 0$
- Bestimme den Schnittpunkt  $L$  der Geraden  $g$  mit der Hilfsebene  $H$ :  $\{L\} = g \cap H$ ; dieser Punkt ist der Fußpunkt des Lotes des Punktes  $P$  auf die Gerade  $g$ , der sogenannte **Lotfußpunkt**.
- Berechne den Abstand  $d$  der Punkte  $P$  und  $L$ .

Dieser Abstand  $d$  ist der Abstand des Punktes  $P$  zur Geraden  $g$ .

**Beispiel:**

Gegeben ist die Gerade  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  und der Punkt  $P(1|-3|-3)$ .

Gesucht ist der Abstand  $d$  des Punktes  $P$  zur Geraden  $g$ .

- $H: \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} * [\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}] = 0;$
- $H \cap g: \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} * [\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}] = 0 \Leftrightarrow r = -1$ , also  $\vec{\ell} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$
- $\vec{\ell} - \vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $d = \sqrt{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$

Der Abstand  $d$  des Punktes  $P$  zur Geraden  $g$  beträgt  $\sqrt{6}LE$ .