Aufg.-Nr.: 19	Bereich: Abbildungsmatrizen	Kursart: LK	CAS

Gegeben sind die Abbildungsmatrix $M=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, die Vektoren $\vec{u}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ sowie die Punkte $A(0/0)$, $B(6/0)$, $C(6/6)$, $D(0/6)$.

1)

a) Bestimmen Sie die Menge aller Fixpunkte von M und bestätige, dass es sich bei dieser Punktmenge um eine Ursprungsgerade g handelt.

(zur Kontrolle und zum Weiterrechnen: $g:\ \vec{x}=r\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}=r\vec{u}$)

b)

i) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix M.

ii) Zeigen Sie mithilfe der bisherigen Ergebnisse :

Ist $\vec{p}=r\vec{u}+s\vec{v}$, so gilt für den Bildvektor $\vec{p'}$: $\vec{p'}=M\circ\vec{p}=r\vec{u}+\frac{1}{2}s\vec{v}$.

c)

i) Zeichnen Sie in dasselbe Koordinatensystem (1 Einheit = 1cm) das Quadrat $ABCD$, das Bild $A'B'C'D'$ dieses Quadrates (bzgl. M) und das Bild $A''B''C''D''$ dieses Bildes.

ii) Erklären Sie mit Hilfe der in b) ii) angegebenen Eigenschaft:

- Ist $P(x/y)$ ein beliebiger Punkt, so liegen die Punkte P, P', P'' auf einer Geraden. (Dabei ist P' der Bildpunkt von P und P'' der Bildpunkt von P'.)
- Parallele Vektoren werden auf parallele Vektoren abgebildet (also $\vec{w}\parallel\vec{z}\ \Rightarrow\ \vec{w'}\parallel\vec{z'}$) .

d)

i) Bestimme Sie M^2, M^3, M^4 und erläutern Sie, weshalb $M^{\infty}=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ die „Grenzmatrix“ M^n für $n\to\infty$ sein könnte.

2) Berechnen Sie für $\vec{p}=r\vec{u}+s\vec{v}$ den Bildvektor $M^{\infty}\cdot\vec{p}$.

a) Erklären Sie mit Hilfe der Ergebnisse aus den bisherigen Teilaufgaben: Welche geometrische Abbildung wird durch die Abbildungsmatrix M^{∞} festgelegt?