Mathematik-Übungsaufgaben

Thema: **Kosten-, Erlös- und Verbrauchmatrizen mit Parameter bei mehrstufigen Produktionsprozessen**
Schulform: **Höhere Handelsschule Oberstufe, WG3/I**
Schwierigkeitsgrad: **mittel bis hoch** **Bearbeitungszeit (ca.): 60 min.**

Ein Betrieb stellt in einem zweistufigen Produktionsprozess aus den vier Rohstoffen R_1, R_2, R_3 und R_4 drei Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 und daraus die Endprodukte E_1, E_2 und E_3 her. Der Materialfluss ist folgenden Tabellen zu entnehmen, wobei $t \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ ein technologieabhängiger Parameter ist.

Rohstoff	ME der Rohstoffe je Zwischenprodukt		
	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	6	8	2
R_2	2	0	t + 2
R_3	0	4	1
R_4	4	6	0

Zwischenprodukte	ME der Zwischenprodukte je Endprodukt		
	E_1	E_2	E_3
Z_1	6	2	2
Z_2	2	4	4
Z_3	t + 6	2	6

a) Wie groß muss für t = 0 der Vorrat an den einzelnen Rohstoffen sein, damit von den Endprodukten E_1, E_2 und E_3 je 1000 ME hergestellt werden können?

b) Das Lager hat momentan einen Rohstoffvorrat von 18.800 ME R_1, 4.800 ME R_2, 6.100 ME R_3 und 0 ME R_4.
Wie viele Mengeneinheiten des Rohstoffes R_4 müssen noch gekauft werden, damit für t = 0 der Lagerbestand vollständig verarbeitet werden kann?
Wie viele Mengeneinheiten können dann von jedem Endprodukt hergestellt werden?

c) Wie hoch ist der Rohstoffbedarf bei der Produktion von je 1 ME der Endprodukte?
Nachstehende Tabelle zeigt die Rohstoffkosten je ME der Rohstoffe R_1, R_2, R_3 und R_4.

Rohstoffkosten in EUR/ME			
R_1	R_2	R_3	R_4
2	1	2	1

Für welche Werte von t betragen die Rohstoffkosten bei der Produktion von je 1 ME der Endprodukte weniger als 700,00 €?

d) Der Betrieb hat die Endprodukte im Stückzahlenverhältnis $E_1 : E_2 : E_3 = 3 : 2 : 1$ gefertigt und dabei 122.400 ME von R_4 verarbeitet.
Wie viele Endprodukte wurden maximal gefertigt?
Für welchen Wert von t werden bei dieser Produktion die geringsten Rohstoffmengen verbraucht?
Wie viele ME der anderen Rohstoffe wurden dabei mindestens benötigt?

Lösungen

a) Für t = 0 wird die Rohstoff-Endverbrauchs-Matrix mit Hilfe der folgenden Matrizenmultiplikation bestimmt:

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 6 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 & 48 & 56 \\ 24 & 8 & 16 \\ 14 & 18 & 22 \\ 36 & 32 & 32 \end{pmatrix}$$

Der gesuchte Rohstoffvorrat wird mit Hilfe der folgenden Matrizenmultiplikation bestimmt:

$$\begin{pmatrix} 64 & 48 & 56 \\ 24 & 8 & 16 \\ 14 & 18 & 22 \\ 36 & 32 & 32 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 168000 \\ 48000 \\ 54000 \\ 100000 \end{pmatrix}$$

Also müssen 168.000 ME von R_1, 48.000 ME von R_2, 54.000 ME von R_3 und 100.000 ME von R_4 vorrätig sein.

b) Für die Bestimmung der benötigten Mengeneinheiten des Rohstoffes R_4 und der Endprodukte E_1, E_2 und E_3 ist die folgende Gleichung relevant:

$$\begin{pmatrix} 64 & 48 & 56 \\ 24 & 8 & 16 \\ 14 & 18 & 22 \\ 36 & 32 & 32 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18800 \\ 4800 \\ 6100 \\ r_4 \end{pmatrix}$$

Es ergibt sich ein inhomogenes lineares Gleichungssystem mit 4 Unbekannten und vier Gleichungen. Für die Bestimmung der Endprodukte E_1, E_2 und E_3 genügt es, das folgende inhomogene lineare Gleichungssystem mit drei Gleichungen zu lösen.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 64 & 48 & 56 & 18800 \\ 24 & 8 & 16 & 4800 \\ 14 & 18 & 22 & 6100 \end{array}\right) \begin{array}{|c|c} \cdot 3 & \cdot 7 \\ \cdot(-8) & \\ & \cdot(-32) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 64 & 48 & 56 & 18800 \\ 0 & 80 & 40 & 18000 \\ 0 & -240 & -312 & -63600 \end{array}\right) \begin{array}{|c} \\ \cdot 3 \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 64 & 48 & 56 & 18800 \\ 0 & 80 & 40 & 18000 \\ 0 & 0 & -192 & -9600 \end{array}\right)$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} -192x_3 &= -9600 \\ x_3 &= 50 \\ 80x_2 + 40x_3 &= 18000 \\ 80x_2 &= 18000 - 2000 \\ 80x_2 &= 16000 \\ x_2 &= 200 \\ 64x_1 + 48x_2 + 56x_3 &= 18800 \\ 64x_1 + 9600 + 2800 &= 18800 \\ x_1 &= 100 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_4 &= 36 \cdot 100 + 32 \cdot 200 + 32 \cdot 50 \\ r_4 &= 11600 \end{aligned}$$

Von dem Rohstoff R_4 müssen noch 11.600 ME gekauft werden, damit für t = 0 der Lagerbestand vollständig verarbeitet werden kann. Das Unternehmen kann dann vom Endprodukt E_1 100 ME, vom Endprodukt E_2 200 ME und vom Endprodukt E_3 50 ME herstellen.

c) Die Rohstoff-Endverbrauchs-Matrix wird mit Hilfe der folgenden Matrizenmultiplikation bestimmt:

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 & 2 \\ 2 & 0 & t+2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ t+6 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t+64 & 48 & 56 \\ t^2+8t+24 & 2t+8 & 6t+16 \\ t+14 & 18 & 22 \\ 36 & 32 & 32 \end{pmatrix}$$

Der Rohstoffbedarf bei Produktion von je 1 ME der Endprodukte wird mit Hilfe der folgenden Matrizenmultiplikation bestimmt:

$$\begin{pmatrix} 2t+64 & 48 & 56 \\ t^2+8t+24 & 2t+8 & 6t+16 \\ t+14 & 18 & 22 \\ 36 & 32 & 32 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t+168 \\ t^2+16t+48 \\ t+54 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Die Rohstoffkosten K_R für die Produktion der angegebenen Endprodukte werden mit Hilfe der folgenden Matrizenmultiplikation bestimmt:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2t+168 \\ t^2+16t+48 \\ t+54 \\ 100 \end{pmatrix} = t^2+22t+592$$

Somit gilt: $K_R(t) = t^2 + 22t + 592$

Damit die Rohstoffkosten K_R für die Produktion von je 1 ME der Endprodukte weniger als 700,00 € betragen, ist die folgende Ungleichung zu lösen:

$$t^2+22t+592 < 700 \Leftrightarrow t^2+22t-108 < 0 \Leftrightarrow -11-\sqrt{11^2+108} < t < -11+\sqrt{11^2+108}$$

$$\Leftrightarrow -26{,}13274595 < t < 4{,}13274595$$

Da $t \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$, muss gelten: $t \in \{0\,;1\,;2\,;3\,;4\}$.

Für $t \in \{0\,;1\,;2\,;3\,;4\}$ betragen die Rohstoffkosten bei der Produktion von je 1 ME der Endprodukte weniger als 700,00 €.

d) Für die Bestimmung der erforderlichen Endprodukte E_1, E_2 und E_3 ist die folgende Gleichung relevant:

$$\begin{pmatrix} 2t+64 & 48 & 56 \\ t^2+8t+24 & 2t+8 & 6t+16 \\ t+14 & 18 & 22 \\ 36 & 32 & 32 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3x \\ 2x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ 122400 \end{pmatrix}$$

Also gilt: $36 \cdot 3x + 32 \cdot 2x + 32x = 122400 \Leftrightarrow 204x = 122400 \Leftrightarrow x = 600$

Somit wurden maximal 1.800 ME von E_1, 1.200 ME von E_2 und 600 ME von E_3 hergestellt.

Also gilt für den Rohstoffbedarf bei Produktion der ermittelten Endprodukte:

$$\begin{pmatrix} 2t+64 & 48 & 56 \\ t^2+8t+24 & 2t+8 & 6t+16 \\ t+14 & 18 & 22 \\ 36 & 32 & 32 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1800 \\ 1200 \\ 600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3600t+206400 \\ 1800t^2+20400t+62400 \\ 1800t+60000 \\ 122400 \end{pmatrix}$$

Da $t \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$, werden die wenigsten Rohstoffe für t = 0 benötigt.
Somit werden bei der Produktion von 1.800 ME von E_1, 1.200 ME von E_2 und 600 ME von E_3 mindestens 206.400 ME von R_1, 62400 ME von R_2 und 60.000 ME von R_3 benötigt.