



## Mathematik-Übungsaufgaben

**Thema:** Kosten-, Erlös- und Verbrauchsmatrizen ohne Parameter bei mehrstufigen Produktionsprozessen

**Schulform:** Höhere Handelsschule Oberstufe, WG3/I

**Schwierigkeitsgrad:** mittel

**Bearbeitungszeit (ca.):** 45 min.

Eine Firma produziert drei Regaltypen M1, M2 und M3. Dabei werden die vier Rohstoffe Metall (R1), Holz (R2), Kunststoff (R3) und Glas (R4) zu Seitenwänden (B1), Regalböden (B2) und Türen (B3) verarbeitet. Aus diesen drei Bauteilen werden zuletzt die verschiedenen Regaltypen gefertigt.

Die Zusammensetzung der drei Regaltypen und der Bedarf an Seitenwänden, Regalböden und Türen zur Herstellung je eines Regaltypen sind durch folgende Tabellen vorgegeben:

	Rohstoffbedarf in kg je Bauteil		
	B1	B2	B3
R1	0,1	0,2	0,2
R2	1	0	0,75
R3	0,2	0,05	0,05
R4	0	0,5	0,25

	Stückzahl der Bauteile je Regaltyp		
	M1	M2	M3
B1	3	2	3
B2	4	5	3
B3	1	0	1

- a) Wie viel kg der einzelnen Rohstoffe sind für jeweils ein Exemplar eines Regaltyps erforderlich?
- b) Für die einzelnen Rohstoffe müssen folgende Kosten berücksichtigt werden:  
Metall 6,- €/kg, Holz 8,- €/kg, Kunststoff 3,- €/kg und Glas 15,- €/kg.  
Wie hoch sind die Rohstoffkosten für jeweils ein Regal der verschiedenen Typen?
- c) Die Firma soll 300 Regale vom Typ M1, 500 Stück vom Typ M2 und 400 Stück vom Typ M3 herstellen. Die folgenden Tabellen zeigen die variablen Herstellungskosten für die Bauteile bzw. die Regaltypen (jeweils in €/Stück):

B1	B2	B3
2,5	0,5	5

M1	M2	M3
30	10	25

Die Verkaufspreis für die einzelnen Regaltypen liegen bei 149,- € für ein Regal M1, 99,- € für ein Regal M2 und 129,- € für ein Regal M3. Die Fixkosten belaufen sich auf 7.645,- €.

Berechnen Sie die Gesamtkosten und den Gewinn für die genannten Produktionsmengen!

- d) Aus den Rohstoffen werden in Werk I die Bauteile hergestellt. Anschließend werden diese dann zu Werk II gebracht, wo sie zu den fertigen Regaltypen verarbeitet werden.  
Der Transport der Bauteile von Werk I nach Werk II verursacht Kosten. Diese betragen je Seitenwand 0,15 €, je Regalboden 0,05 € und je Türe 0,10 €.  
Wie hoch sind dann die Transportkosten für die Produktionsmengen der Regaltypen aus Teil c)?
- e) In Werk II befinden sich noch 430 Seitenwände, 720 Regalböden und 90 Türen auf Lager.  
Wie viele der einzelnen Regaltypen M1, M2 und M3 lassen sich daraus herstellen? (Lösung mit dem Gauß-Algorithmus)
- f) In Zukunft sollen Seitenwände, Regalböden und Türen im Verhältnis  $B1 : B2 : B3 = 4 : 6 : 1$  von Werk I geliefert werden. Dort befinden sich noch 650 kg Glas auf Lager.  
Wie viele Seitenwände, Regalböden und Türen lassen sich daraus herstellen?  
Wie viel kg Metall, Holz und Kunststoff benötigt man dazu noch?
- g) Der Preis für den Rohstoff Glas steigt, alle anderen Rohstoffpreis bleiben unverändert (siehe Teil b)). Die Herstellung eines Regaltyps soll eingestellt werden, wenn sich die Rohstoffkosten des jeweiligen Regaltyps um mehr als 10 % erhöhen.  
Ab welcher Preiserhöhung (in €/kg) muss die Produktion eines Typs eingestellt werden?  
Welcher Typ wäre das?



## Mathematik-Übungsaufgaben

### Lösungen

- a) Der notwendige Rohstoffbedarf wird mit Hilfe der folgenden Matrizenmultiplikation bestimmt:

$$\begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,2 \\ 1 & 0 & 0,75 \\ 0,2 & 0,05 & 0,05 \\ 0 & 0,5 & 0,25 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,3 & 1,2 & 1,1 \\ 3,75 & 2 & 3,75 \\ 0,85 & 0,65 & 0,8 \\ 2,25 & 2,5 & 1,75 \end{pmatrix}$$

Für die Fertigung von 1 ME von M1 werden 1,3 kg von R1, 3,75 kg von R2, 0,85 kg von R3 und 2,25 kg von R4 benötigt.

Für die Fertigung von 1 ME von M2 werden 1,2 kg von R1, 2 kg von R2, 0,65 kg von R3 und 2,5 kg von R4 benötigt.

Für die Fertigung von 1 ME von M3 werden 1,1 kg von R1, 3,75 kg von R2, 0,8 kg von R3 und 1,75 kg von R4 benötigt.

- b) Die Rohstoffkosten für jeweils ein Regal der verschiedenen Typen werden mit Hilfe der folgenden Matrizenmultiplikation bestimmt:

$$(6 \quad 8 \quad 3 \quad 15) \circ \begin{pmatrix} 1,3 & 1,2 & 1,1 \\ 3,75 & 2 & 3,75 \\ 0,85 & 0,65 & 0,8 \\ 2,25 & 2,5 & 1,75 \end{pmatrix} = (74,1 \quad 62,65 \quad 65,25)$$

Die Rohstoffkosten betragen für 1 ME von M1 74,10 €, für 1 ME von M2 62,65 € und für 1 ME von M3 65,25 €.

- c) Die Rohstoffkosten für den Auftrag werden mit Hilfe der folgenden Matrizenmultiplikation bestimmt:

$$(74,1 \quad 62,65 \quad 65,25) \circ \begin{pmatrix} 300 \\ 500 \\ 400 \end{pmatrix} = 79655$$

Die variablen Kosten der Bauteile werden mit Hilfe der folgenden Matrizenmultiplikation bestimmt:

$$(2,5 \quad 0,5 \quad 5) \circ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 300 \\ 500 \\ 400 \end{pmatrix} \\ = (14,5 \quad 7,5 \quad 14) \circ \begin{pmatrix} 300 \\ 500 \\ 400 \end{pmatrix} = 13700$$

Die variablen Kosten der Regale werden mit Hilfe der folgenden Matrizenmultiplikation bestimmt:

$$(30 \quad 10 \quad 25) \circ \begin{pmatrix} 300 \\ 500 \\ 400 \end{pmatrix} = 24000$$

Rohstoffkosten	79.655 €
+ Fixe Kosten	7.645 €
+ Variable Kosten der Bauteile	13.700 €
+ Variable Kosten der Regale	24.000 €
= Selbstkosten	125.000 €



## Mathematik-Übungsaufgaben

Die Gesamtkosten für die genannten Produktionsmengen betragen 125.000,00 €.

Der Gesamterlös wird mit Hilfe der folgenden Matrizenmultiplikation bestimmt:

$$(149 \quad 99 \quad 129) \circ \begin{pmatrix} 300 \\ 500 \\ 400 \end{pmatrix} = 145800$$

Gesamterlös	145.800 €
- Selbstkosten	125.000 €
= Gewinn	20.800 €

Bei Absatz der genannten Produktionsmengen werden somit 20.800 € Gewinn erzielt.

d) Für die Bestimmung der benötigten Bauteile ist folgende Matrizenmultiplikation relevant:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 300 \\ 500 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3100 \\ 4900 \\ 700 \end{pmatrix}$$

Nun können die Transportkosten mit Hilfe der folgenden Matrizenmultiplikation bestimmt werden:

$$(0,15 \quad 0,05 \quad 0,1) \circ \begin{pmatrix} 3100 \\ 4900 \\ 700 \end{pmatrix} = 780$$

Die Transportkosten betragen 780 €.

e) Für die Bestimmung der Anzahl der Regale, die sich aus den genannten Bauteilen herstellen lassen, ist die folgende Gleichung relevant:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 430 \\ 720 \\ 90 \end{pmatrix}$$

Es ergibt sich ein inhomogenes lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 3 & 430 \\ 4 & 5 & 3 & 720 \\ 1 & 0 & 1 & 90 \end{array} \right) \cdot (-4) \quad \cdot (-1)$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 3 & 430 \\ 0 & 7 & -3 & 440 \\ 0 & -2 & 0 & -160 \end{array} \right)$$

Also gilt:

$$-2x_2 = -160$$

$$x_2 = 80$$

$$7x_2 - 3x_3 = 440$$

$$-3x_3 = 440 - 560$$

$$-3x_3 = -120$$

$$x_3 = 40$$

$$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 430$$

$$3x_1 + 160 + 120 = 430$$

$$x_1 = 50$$

Die Firma kann vom Regal M1 50 ME, vom Regal M2 80 ME und vom Regal M3 40 ME herstellen.

f) Für die Bestimmung der Anzahl der Bauteile, die sich aus den genannten Rohstoffen herstellen lassen, ist die folgende Gleichung relevant:



## Mathematik-Übungsaufgaben

$$\begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,2 \\ 1 & 0 & 0,75 \\ 0,2 & 0,05 & 0,05 \\ 0 & 0,5 & 0,25 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4x \\ 6x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ 650 \end{pmatrix} \quad \text{Also gilt: } \begin{matrix} 3,25x = 650 \\ x = 200 \end{matrix}$$

Es können 800 Seitenwände, 1200 Regalböden und 200 Türen hergestellt werden.  
Weiterhin gilt nun:

$$\begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,2 \\ 1 & 0 & 0,75 \\ 0,2 & 0,05 & 0,05 \\ 0 & 0,5 & 0,25 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 800 \\ 1200 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 360 \\ 950 \\ 230 \\ 650 \end{pmatrix}$$

Man benötigt 360 kg Metall, 950 kg Holz und 230 kg Kunststoff.

- g) Die Rohstoffkosten für jeweils ein Regal der verschiedenen Typen werden mit Hilfe der folgenden Matrizenmultiplikation bestimmt:

$$(6 \quad 8 \quad 3 \quad 15+x) \circ \begin{pmatrix} 1,3 & 1,2 & 1,1 \\ 3,75 & 2 & 3,75 \\ 0,85 & 0,65 & 0,8 \\ 2,25 & 2,5 & 1,75 \end{pmatrix} = (74,1+2,25x \quad 62,65+2,5x \quad 65,25+1,75x)$$

Eine Erhöhung der Rohstoffkosten um 10 % bedeutet für Regal M1:  $74,1 \cdot 0,1 = 7,41$

Eine Erhöhung der Rohstoffkosten um 10 % bedeutet für Regal M2:  $62,65 \cdot 0,1 = 6,265$

Eine Erhöhung der Rohstoffkosten um 10 % bedeutet für Regal M3:  $65,25 \cdot 0,1 = 6,525$

$$\left. \begin{matrix} 7,41 \geq 2,25x \\ 6,265 \geq 2,5x \\ 6,525 \geq 1,75x \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} x \leq 3,29\bar{3} \\ x \leq 2,506 \\ x \leq 3,72857 \end{matrix} \right\}.$$

Ab einer Preiserhöhung von 2,51 € pro kg Glas muss die Produktion des Regals M2 eingestellt werden.