

Lineare Gleichungssysteme - 3 Gleichungen mit 1 Variablen - Grundwissen für TR



Ein **Lineares Gleichungssystem (LGS) mit 3 Gleichungen und 1 Variablen** (hier der Variablen r), hat vor dem Vereinfachen mit Hilfe des Taschenrechners im Allgemeinen die Form

$$\begin{array}{rcl} a_{11} \cdot r & = & b_1 \\ a_{21} \cdot r & = & b_2 \text{ bzw.} \\ a_{31} \cdot r & = & b_3 \end{array} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \\ a_{31} & b_3 \end{bmatrix}$$

mit $a_{11} \neq 0$; $a_{21}, a_{31}, b_1, b_2, b_3$ beliebig .

Man spricht hier von einem 3×2 -System mit 3 Zeilen und 2 Spalten.

Nach dem Vereinfachen hat das LGS eine der folgenden zwei Formen:

1. Fall:

$$\begin{array}{rcl} 1 \cdot r & = & 0 \\ 0 & = & 1 \text{ bzw.} \\ 0 & = & 0 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Die zweite Gleichung ist eine falsche Aussage; kann also durch keine Einsetzung in eine wahre Aussage überführt werden.

Das LGS hat also **keine Lösung**: $L = \{ \}$

2. Fall:

$$\begin{array}{rcl} 1 \cdot r & = & c_1 \\ 0 & = & 0 \text{ bzw.} \\ 0 & = & 0 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & c_1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ mit } c_1 \text{ beliebig .}$$

Die letzten beiden Gleichungen sind wahre Aussagen, die erste Gleichung wird durch die Einsetzung $r = c_1$ in eine wahre Aussage überführt.

Das LGS hat also **eine eindeutige Lösung**: $L = \{c_1\}$

Bemerkung: Verschiedene Taschenrechner sind nicht in der Lage, 3×2 -Systeme zu vereinfachen, sondern fordern, dass die Spaltenzahl mindestens genau so groß wie die Zeilenzahl ist. Dieses Problem kann man dadurch lösen, dass man eine zusätzliche virtuelle Variable und dadurch eine zusätzliche Spalte mit lauter Nullen in das LGS einfügt. So erhält das System die Form

$$\begin{array}{rcl} a_{11} \cdot r & + 0 \cdot s & = b_1 \\ a_{21} \cdot r & + 0 \cdot s & = b_2 \text{ bzw.} \\ a_{31} \cdot r & + 0 \cdot s & = b_3 \end{array} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & b_1 \\ a_{21} & 0 & b_2 \\ a_{31} & 0 & b_3 \end{bmatrix} \text{ mit}$$

$a_{11} \neq 0$; $a_{21}, a_{31}, b_1, b_2, b_3$ beliebig .

Dieses 3×3 -System lässt sich nun mit dem Taschenrechner vereinfachen; die mittlere Spalte enthält nach dem Vereinfachen weiterhin nur Nullen und braucht bei der Bestimmung der Lösungsmenge nicht beachtet zu werden.