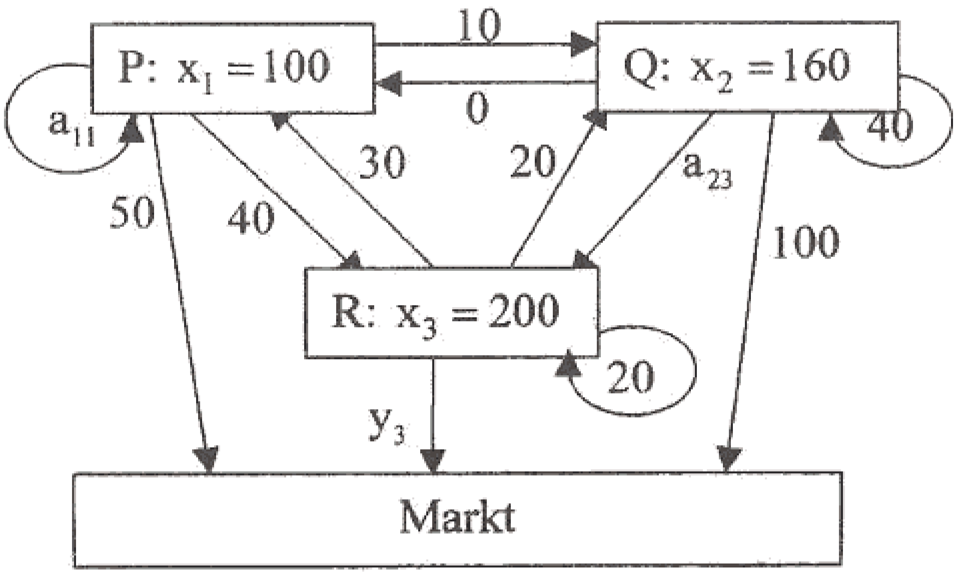
Name: **Datum:**

Produktionsverflechtung - Aufgabe 10 mit Lösung

Die drei Zweigwerke P, Q und R eines Unternehmens sind untereinander und mit dem Markt nach dem LEONTIEF-Modell verflochten. Das untenstehende Diagramm stellt die Verflechtung dar.



☞ **Arbeitsaufträge:**

a) *Bestimmen Sie die Inputmatrix A.* (4 BE)

b) In einem früheren Zeitraum war der Marktvektor $\vec{y} = \begin{pmatrix} 57 \\ 26 \\ 60 \end{pmatrix}$

Berechnen Sie den zugehörigen Produktionsvektor $\vec{x}$. (5 BE)

c) Nach einer Umstellung des Produktionsverfahrens ist eine neue Inputmatrix gegeben durch $A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1t^2 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}1t^2 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}1 \end{pmatrix}$, dabei ist $t \in [0{,}5\,;3]$ ein reeller technologieabhängiger Parameter. Für die Produktion ist folgender Produktionsvektor geplant: $\vec{x}_t = \begin{pmatrix} 200 \\ 40t \\ 100 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie den Wert von t, für welchen die Summe der Marktabgaben aller drei Zweigwerke am größten ist. (6 BE)

Lösung:

a) Verflechtungstabelle:

	P	Q	R	Markt	Produktion
P	a_{11}	10	40	50	100
Q	0	40	a_{23}	100	160
R	30	20	20	y_3	200

Aus der Tabelle folgt: $a_{11} = 0$; $a_{23} = 20$; $y_3 = 130$.

Die Inputmatrix A ergibt sich, indem die P-Spalte durch 100, die Q-Spalte durch 160 und die R-Spalte durch 200 dividiert wird:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}0625 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}25 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}125 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$

b) $\vec{x} = A \cdot \vec{x} + \vec{y} \quad \Rightarrow$

Gauß–Algorithmus:

$$\begin{array}{ccc|cl} 1 & -0{,}0625 & -0{,}2 & 57 & \cdot 3 \\ 0 & 0{,}75 & -0{,}1 & 26 & \\ -0{,}3 & -0{,}125 & 0{,}9 & 60 & \cdot 10 \\ \hline 1 & -0{,}0625 & -0{,}2 & 57 & \\ 0 & 0{,}75 & -0{,}1 & 26 & \cdot 84 \\ 0 & -1{,}4375 & 8{,}4 & 771 & \\ \hline 1 & -0{,}0625 & -0{,}2 & 57 & \Rightarrow x_1 = 80 \\ 0 & 0{,}75 & -0{,}1 & 26 & \Rightarrow x_3 = 100 \\ 0 & 61{,}5625 & 0 & 2955 & \Rightarrow x_2 = 48 \end{array}$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 80 \\ 48 \\ 100 \end{pmatrix}$$

c) $\vec{y} = \vec{x} - A \cdot \vec{x}$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}1t^2 & -0{,}2 \\ 0 & 1-0{,}1t^2 & -0{,}1 \\ 0 & -0{,}4 & 0{,}9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 40t \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4t^3 + 140 \\ -4t^3 + 40t - 10 \\ -16t + 90 \end{pmatrix}$$

Die Summe der Marktabgaben beträgt also $S(t) = -8t^3 + 24t + 220$.

Bestimmung des Maximums: $S'(t) = -24t^2 + 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 1$ ($t = -1$ ist uninteressant, denn es liegt nicht zwischen 0,5 und 3.)

Bei $t = 1$ liegt ein Maximum von S vor, da dort die Steigung von + nach – wechselt.

Da S nur für $t < -1$ größer werden kann als bei $t = 1$, wird die Summe der Marktabgaben im Intervall $[0{,}5 ; 3]$ für $t = 1$ am größten.