

Name:

Datum:

### Produktionsverflechtung - Aufgabe 11 mit Lösung

Die Verflechtungen dreier Abteilungen U, V und W eines Betriebes untereinander und mit dem Markt

nach dem Leontief-Modell sind durch die Inputmatrix  $A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,4 & 0,1 \\ 0 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}$  gegeben.

#### Arbeitsaufträge:

a) Berechnen Sie die Produktionsmengen in den einzelnen Abteilungen, wenn mit dem

Marktabgabevektor  $\vec{y} = \begin{pmatrix} 120 \\ 120 \\ 0 \end{pmatrix}$  gerechnet wird. (6 BE)

b) Geben Sie für die Produktion nach Aufgabenteil a) die Verflechtungstabelle mit allen intern verbrauchten und an den Markt gelieferten Mengen an. (3 BE)

c) Für eine kurzfristige Planung gilt der Produktionsvektor  $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 200 \\ 40t - 10 \\ 20t^2 \end{pmatrix}$  mit  $t \in [1; 4]$ . Mit  $s(t)$  wird

die Summe der an den Markt abgegebenen Mengen in Abhängigkeit von  $t$  bezeichnet.

Bestimmen Sie den Wert von  $t$ , für den  $s(t)$  am größten wird, und berechnen Sie den Maximalwert von  $s(t)$ . (7 BE)

## Lösung:

a)  $\bar{x} = A \cdot \bar{x} + \bar{y} \Rightarrow$

Gauß-Algorithmus:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 0,6 & -0,2 & -0,3 & 120 \\ -0,1 & 0,6 & -0,1 & 120 \\ 0 & -0,2 & 0,3 & 0 \end{array} \right] \cdot 6$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 0,6 & -0,2 & -0,3 & 120 \\ 0 & 3,4 & -0,9 & 840 \\ 0 & -0,2 & 0,3 & 0 \end{array} \right] \cdot 17$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 0,6 & -0,2 & -0,3 & 120 \\ 0 & 3,4 & -0,9 & 840 \\ 0 & 0 & 4,2 & 840 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow 4,2 x_3 = 840 \Rightarrow x_3 = 200$$

$$\Rightarrow 3,4 x_2 - 180 = 840 \Rightarrow x_2 = 300$$

$$\Rightarrow 0,6 x_1 - 60 - 60 = 120 \Rightarrow x_1 = 400$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 400 \\ 300 \\ 200 \end{pmatrix}$$

b)  $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,4 & 0,1 \\ 0 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 400 \\ 300 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 160 + 60 + 60 \\ 40 + 120 + 20 \\ 0 + 60 + 140 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow$$

	U	V	W	Markt	Prod.
U	160	60	60	120	400
V	40	120	20	120	300
W	0	60	140	0	200

c)  $\bar{y}(t) = \bar{x} - A \cdot \bar{x} = \begin{pmatrix} 0,6 & -0,2 & -0,3 \\ -0,1 & 0,6 & -0,1 \\ 0 & -0,2 & 0,3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 40t-10 \\ 20t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 - 8t + 2 - 6t^2 \\ -20 + 24t - 6 - 2t^2 \\ -8t + 2 + 6t^2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow s(t) = -2t^2 + 8t + 98$$

$$\Rightarrow s'(t) = -4t + 8 = 0 \Rightarrow t = 2 \in [1; 4]$$

$$s(2) = 106$$

Da  $G_s$  eine nach unten geöffnete Parabel ist, handelt es sich um ein Maximum.