Name: **Datum:**

Produktionsverflechtung - Aufgabe 12 mit Lösung

Die drei Zweigwerke U, V, W eines Betriebes sind nach dem Leontief-Modell untereinander und mit dem Markt verflochten. Die derzeitige Produktion beträgt im Werk U 800ME (Mengeneinheiten), im Werk V 450ME und im Werk W 300ME. Die Verflechtung ist der untenstehenden Tabelle zu entnehmen.

	U	**V**	**W**	**Markt**
U	a	450	180	10
V	0	b	0	360
W	160	0	c	80

☞ **Arbeitsaufträge:**

a) *Ermitteln Sie die Werte a, b und c und die Inputmatrix A.* (4 BE)

b) Die Abgabe von U an den Markt soll sich auf 62ME erhöhen, ohne dass sich die Abgaben von V und W an den Markt ändern.

Ermitteln Sie die dazu benötigten Produktionsmengen der einzelnen Zweigwerke. (5 BE)

c) Nun wird festgestellt, dass die Produktionsmengen in V und W doch nicht erhöht werden können, sondern lediglich die Produktion in U ausgeweitet werden kann. Es wird für jede produzierte und an den Markt abgegebene Mengeneinheit 1GE (Geldeinheit) erzielt.

Ermitteln Sie die maximal mögliche Gesamteinnahme, die durch die Ausweitung der Produktion in U erreicht werden kann. (6 BE)

Lösung:

a) I. $a + 450 + 180 + 10 = 800$? $a = 160$
II. $b + 360 = 450$? $b = 90$
III. $160 + c + 80 = 300$? $c = 60$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{160}{800} & \frac{450}{450} & \frac{180}{300} \\ 0 & \frac{90}{450} & 0 \\ \frac{160}{800} & 0 & \frac{60}{300} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 1 & 0{,}6 \\ 0 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$

b)

Neuer Marktabgabevektor $\vec{y} = \begin{pmatrix} 62 \\ 360 \\ 80 \end{pmatrix}$

$(E - A) \cdot \vec{x} = \vec{y} \quad \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & -1 & -0{,}6 \\ 0 & 0{,}8 & 0 \\ -0{,}2 & 0 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 62 \\ 360 \\ 80 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -10 & -6 & 620 \\ 0 & 8 & 0 & 3600 \\ -2 & 0 & 8 & 800 \end{array}\right) \quad I + 4 \cdot III$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -10 & -6 & 620 \\ 0 & 8 & 0 & 3600 \\ 0 & -10 & 26 & 3820 \end{array}\right) \quad 5 \cdot II + 4 \cdot III$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -10 & -6 & 620 \\ 0 & 8 & 0 & 3600 \\ 0 & 0 & 104 & 33280 \end{array}\right) \quad \Rightarrow$$

$104 x_3 = 33280 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 320$

$8 x_2 = 3600 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 450 \quad \Rightarrow$

$8 x_1 - 10 \cdot 450 - 6 \cdot 320 = 620 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 880$

Neuer Produktionsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 880 \\ 450 \\ 320 \end{pmatrix}$

c) $\vec{y} = \vec{x} - A \cdot \vec{x} =$

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & -1 & -0{,}6 \\ 0 & 0{,}8 & 0 \\ -0{,}2 & 0 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ 450 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8u - 450 - 180 \\ 360 \\ -0{,}2u + 240 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8u - 630 \\ 360 \\ -0{,}2u + 240 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

I. $0{,}8u - 630 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad u \geq 787{,}5$
II. $-0{,}2u + 240 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad u \leq 1200$
$\Rightarrow \quad 787{,}5 \leq u \leq 1200$

$G(u) = (0{,}8u - 630) \cdot 1 + 360 \cdot 1 + (-0{,}2u + 240) \cdot 1$
$= 0{,}8u - 630 + 360 - 0{,}2u + 240 = 0{,}6u - 30; \quad D_G = [787{,}5;\ 1200]$

Der Graf von G ist eine steigende Gerade, hat also an der rechten Definitionsgrenze den größten y-Wert.

$\Rightarrow$ Maximale Gesamteinnahme: $G(1200) = 0{,}6 \cdot 1200 - 30 = 690$ [€]