

Name:

Datum:

Produktionsverflechtung - Aufgabe 13 mit Lösung

Die drei Zweigwerke U, V und W eines Betriebes sind nach dem LEONTIEF-Modell untereinander und

mit dem Markt verflochten. $A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0,4 \\ 0,1 & 0,2 & 0 \\ 0,3 & 0,5 & 0,1 \end{pmatrix}$ ist die zugehörige Inputmatrix.

Arbeitsaufträge:

a) Erklären Sie die Bedeutung der Werte Null in der obigen Matrix. (3 BE)

b) Ermitteln Sie, wie viele Mengeneinheiten V an U liefert bzw. V selbst verbraucht, wenn der

Produktionsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 120 \\ 80 \\ 100 \end{pmatrix}$ ist. (4 BE)

c) In einem anderen Produktionszeitraum steigt die Nachfrage auf $\vec{y} = \begin{pmatrix} 30 \\ 130 \\ 80 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie den zugehörigen Produktionsvektor. (5 BE)

Lösung:

$$\text{a) } \vec{y} = (E - A) \vec{x} \Rightarrow y_U = 0,5 x_U + 0 x_V - 0,4 x_W \Rightarrow$$

Zur Marktabgabe von Zweigwerk U trägt Zweigwerk V nichts bei.

Analog trägt zur Marktabgabe von V Zweigwerk W nichts bei.

Den Nullen kann man noch eine zweite Bedeutung beimessen. Da sie nicht in der Hauptdiagonalen der Matrix $E - A$ stehen, kommen sie auch in der Inputmatrix A selber vor. Das heißt dann aber, dass U nichts an V und V nichts an W liefert.

$$\text{b) } E - A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & -0,4 \\ -0,1 & 0,8 & 0 \\ -0,3 & -0,5 & 0,9 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0,4 \\ 0,1 & 0,2 & 0 \\ 0,3 & 0,5 & 0,1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A \vec{x} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0,4 \\ 0,1 & 0,2 & 0 \\ 0,3 & 0,5 & 0,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 120 \\ 80 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 + 0 + 40 \\ 12 + 16 + 0 \\ 36 + 40 + 10 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

V liefert an U 12 und verbraucht selbst 16 Produktionseinheiten.

$$\text{c) } (E - A) \vec{x} = \vec{y} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & -0,4 \\ -0,1 & 0,8 & 0 \\ -0,3 & -0,5 & 0,9 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 30 \\ 130 \\ 80 \end{pmatrix}$$

Gauß-Algorithmus:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0,5 & 0 & -0,4 & 30 \\ -0,1 & 0,8 & 0 & 130 \\ -0,3 & -0,5 & 0,9 & 80 \end{array} \right] \cdot 5 \quad] \cdot (-3)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0,5 & 0 & -0,4 & 30 \\ 0 & 4 & -0,4 & 680 \\ 0 & -2,9 & 0,9 & -310 \end{array} \right] \cdot 2,9 \quad] \cdot 4$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0,5 & 0 & -0,4 & 30 \\ 0 & 4 & -0,4 & 680 \\ 0 & 0 & 2,44 & 732 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow 2,44 x_3 = 732 \Rightarrow x_3 = 300$$

$$\Rightarrow 4 x_2 - 120 = 680 \Rightarrow x_2 = 200$$

$$\Rightarrow 0,5 x_1 - 120 = 30 \Rightarrow x_1 = 300$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}$$