

Name:

Datum:

Produktionsverflechtung - Aufgabe 14 mit Lösung

In einem Industrieunternehmen sind die drei Produktionsbereiche U, V, W nach dem LEONTIEF-Modell

untereinander und mit dem Markt verflochten. Gegeben sind die Inputmatrix $A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 & 0,05 \\ 0,1 & 0,4 & 0,05 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \end{pmatrix}$ und

der Marktvektor $\bar{y} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix}$.

Arbeitsaufträge:

- a) Berechnen Sie den Produktionsvektor \bar{x} und erstellen Sie die Input-Output-Tabelle.
[Kontrollergebnis: $x_1 = 30$; $x_2 = 20$; $x_3 = 40$] (6 BE)
- b) Im nächsten Produktionszeitraum bleibt die Produktion im Bereich U unverändert, bei V sinkt sie auf die Hälfte ab.

Ermitteln Sie das Intervall I_W , in dem die Produktionsmenge von W variieren kann. Bestimmen Sie den Marktvektor \bar{y} , falls die Produktionsmenge von W auf den kleinsten Wert absinkt. (6 BE)

Lösung:

a) $(E - A) \cdot \vec{x} = \vec{y} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 0,5 & -0,4 & -0,05 \\ -0,1 & 0,6 & -0,05 \\ -0,2 & -0,6 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{ccc|c} 5 & -4 & -0,5 & 50 \\ -1 & 6 & -0,5 & 70 \\ -2 & -6 & 8 & 140 \end{array} \quad \begin{array}{l} I + 5 \cdot II \\ 2 \cdot II - III \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 5 & -4 & -0,5 & 50 \\ 0 & 26 & -3 & 400 \\ 0 & 18 & -9 & 0 \end{array} \quad II - \frac{13}{9} \cdot III$$

$$\begin{array}{ccc|c} 5 & -4 & -0,5 & 50 \\ 0 & 26 & -3 & 400 \\ 0 & 0 & 10 & 400 \end{array} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} 10x_3 &= 400 &\Rightarrow x_3 &= 40 \\ 26x_2 - 3 \cdot 40 &= 400 &\Rightarrow x_2 &= 20 \quad \Rightarrow \\ 5x_1 - 4 \cdot 20 - 0,5 \cdot 40 &= 50 &\Rightarrow x_1 &= 30 \end{aligned}$$

Produktionsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 40 \end{pmatrix}$

Input-Output-Tabelle:

	U	V	W	Markt	Produktion
U	$0,5 \cdot 30 = 15$	$0,4 \cdot 20 = 8$	$0,05 \cdot 40 = 2$	5	30
V	$0,1 \cdot 30 = 3$	$0,4 \cdot 20 = 8$	$0,05 \cdot 40 = 2$	7	20
W	$0,2 \cdot 30 = 6$	$0,6 \cdot 20 = 12$	$0,2 \cdot 40 = 8$	14	40

b) $(E - A) \cdot \vec{x} = \vec{y} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 0,5 & -0,4 & -0,05 \\ -0,1 & 0,6 & -0,05 \\ -0,2 & -0,6 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 - 0,05w \\ 3 - 0,05w \\ -12 + 0,8w \end{pmatrix}$$

Da keine negative Anzahl an Produktionseinheiten an den Markt abgegeben werden kann, muss gelten:

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad 11 - 0,05w &\geq 0 &\Rightarrow w &\leq 220 \\ \text{II.} \quad 3 - 0,05w &\geq 0 &\Rightarrow w &\leq 60 \quad \Rightarrow w \in [15; 60] \\ \text{III.} \quad -12 + 0,8w &\geq 0 &\Rightarrow w &\geq 15 \end{aligned}$$

Die kleinstmögliche Produktionsmenge von W beträgt also 15 Einheiten.

In diesem Fall gilt:

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 11 - 0,05 \cdot 15 \\ 3 - 0,05 \cdot 15 \\ -12 + 0,8 \cdot 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10,25 \\ 2,25 \\ 0 \end{pmatrix}$$