Name: **Datum:**

Produktionsverflechtung - Aufgabe 15 mit Lösung

Die drei Werke A, B und C eines Unternehmens sind nach dem LEONTIEF-Modell verflochten. (Produktionszahlen pro Jahr in ME)

Werk	A	B	C	Konsum
A	20	8	8	4
B	4	8	4	4
C	8	16	8	8

☞ **Arbeitsaufträge:**

a) *Bestimmen Sie die Inputmatrix.* (3 BE)

b) Im nächsten Jahr sollen sich die Lieferungen an die Kunden bei gleich bleibender Inputmatrix wie folgt ändern: Von Werk A und C gehen die Lieferungen um jeweils 25% zurück, von Werk B verdoppeln sie sich.

Bestimmen Sie den Produktionsvektor $\vec{x}$. (6 BE)

c) Für die längerfristige Planung ist bei gleichbleibender Inputmatrix folgender Produktionsvektor mit $t \in [0, \infty[$ vorgesehen: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 50 \\ 30 \\ 50 + t^2 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie diejenigen t-Werte, für die sich bei allen 3 Werken für die Marktabgabe mögliche Werte ergeben und die Lieferung von Werk C an die Kunden größer ist als die von Werk B.

Ermitteln Sie außerdem denjenigen t-Wert, für den die Summe der Marktabgaben aller 3 Werke innerhalb des möglichen Bereichs maximal wird und bestimmen Sie diesen Maximalwert. (9 BE)

Lösung:

a)

$$\text{Produktionsvektor } \vec{p} = \begin{pmatrix} 20+8+8+4 \\ 4+8+4+4 \\ 8+16+8+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 40 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\text{Inputmatrix } A = \begin{pmatrix} \frac{20}{40} & \frac{8}{20} & \frac{8}{40} \\ \frac{4}{40} & \frac{8}{20} & \frac{4}{40} \\ \frac{8}{40} & \frac{16}{20} & \frac{8}{40} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$

b)

$$\text{Neuer Marktabgabevektor } \vec{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$(E-A)\cdot\vec{x} = \vec{y} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0{,}5 & -0{,}4 & -0{,}2 \\ -0{,}1 & 0{,}6 & -0{,}1 \\ -0{,}2 & -0{,}8 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{rrr|r} 5 & -4 & -2 & 30 \\ -1 & 6 & -1 & 80 \\ -2 & -8 & 8 & 60 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \mathrm{I} + 5\cdot\mathrm{II} \\ 2\cdot\mathrm{II} - \mathrm{III} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rrr|r} 5 & -4 & -2 & 30 \\ 0 & 26 & -7 & 430 \\ 0 & 20 & -10 & 100 \end{array}\right. \quad \mathrm{II} - \frac{13}{10}\cdot\mathrm{III}$$

$$\left.\begin{array}{rrr|r} 5 & -4 & -2 & 30 \\ 0 & 26 & -7 & 430 \\ 0 & 0 & 6 & 300 \end{array}\right. \quad \Rightarrow$$

$$6x_3 = 300 \Rightarrow x_3 = 50$$

$$26x_2 - 7\cdot 50 = 430 \Rightarrow x_2 = 30 \quad \Rightarrow$$

$$5x_1 - 4\cdot 30 - 2\cdot 50 = 30 \Rightarrow x_1 = 50$$

$$\text{Neuer Produktionsvektor: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 50 \\ 30 \\ 50 \end{pmatrix}$$

c) $\vec{y} = (E - A) \cdot \vec{x} \quad \Rightarrow$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,4 & -0,2 \\ -0,1 & 0,6 & -0,1 \\ -0,2 & -0,8 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 30 \\ 50+t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25-12-10-0,2t^2 \\ -5+18-5-0,1t^2 \\ -10-24+40+0,8t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-0,2t^2 \\ 8-0,1t^2 \\ 6+0,8t^2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{lllll}
\text{I.} & 3-0,2t^2 \geq 0 & \Rightarrow & t^2 \leq 15 \overset{t\geq 0}{\Rightarrow} & 0 \leq t \leq \sqrt{15} \\
\text{II.} & 8-0,1t^2 \geq 0 & \Rightarrow & t^2 \leq 80 \overset{t\geq 0}{\Rightarrow} & 0 \leq t \leq \sqrt{80} \\
\text{III.} & 6+0,8t^2 \geq 0 & \text{ist für jedes } t \text{ erfüllt.} & & \\
\text{IV.} & 6+0,8t^2 > 8-0,1t^2 & \Rightarrow & t^2 > \frac{20}{9} \overset{t\geq 0}{\Rightarrow} & t > \frac{2}{3}\sqrt{5}
\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2}{3}\sqrt{5} < t \leq \sqrt{15}$$

$S(t) = 3-0,2t^2+8-0,1t^2+6+0,8t^2 = 0,5t^2+17 \quad \Rightarrow$

$S'(t) = t = 0$: unbrauchbar, da $\frac{2}{3}\sqrt{5} < t \leq \sqrt{15}$ gefordert.

Also liegt ein Randmaximum vor, und zwar bei $t = \sqrt{15}$, da S im möglichen t-Bereich streng monoton steigt.

Maximalwert: $S(\sqrt{15}) = 24,5$