Name: **Datum:**

Produktionsverflechtung - Aufgabe 16 mit Lösung

Die drei Abteilungen F, G und H eines Unternehmens sind nach dem LEONTIEF-Modell miteinander verbunden. (Angaben in Mengeneinheiten ME)

	F	**G**	**H**	**Markt**
F	20	3	2	15
G	8	9	6	7
H	4	3	0	3

☞ **Arbeitsaufträge:**

a) *Bestimmen Sie die Inputmatrix A.* (3 BE)

b) Es wird eine Produktionserhöhung in Abteilung F um 20ME und in Abteilung G um 30ME bei gleichbleibender Produktion in H vorgeschlagen.

Beurteilen Sie anhand des neuen Marktvektors, ob dies möglich ist. (3 BE)

c) *Berechnen Sie zum Marktvektor* $\vec{y} = \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ *den Produktionsvektor.* (4 BE)

d) Nun soll Abteilung F die Produktion auf 60ME erhöhen und die Abteilungen F und G sollen jeweils mindestens 20ME an den Markt abgeben.

Stellen Sie die drei sich ergebenden Bedingungen in einem $x_2 - x_3$ *–Koordinatensystem (*$0 \leq x_2 \leq 80$*) dar, und kennzeichnen Sie den Bereich für die zugehörigen Produktionszahlen in den Abteilungen G und H.* (8 BE)

Lösung:

a) Zunächst wird der Produktionsvektor bestimmt und damit dann die Inputmatrix aufgestellt:

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 20+3+2+15 \\ 8+9+6+7 \\ 4+3+0+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \frac{20}{40} & \frac{3}{30} & \frac{2}{10} \\ \frac{8}{40} & \frac{9}{30} & \frac{6}{10} \\ \frac{4}{40} & \frac{3}{30} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,6 \\ 0,1 & 0,1 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

Neuer Produktionsvektor: $\vec{p} = \begin{pmatrix} 60 \\ 60 \\ 10 \end{pmatrix};$

Berechnung des Marktvektors $\vec{y}$:

$$\vec{y} = (E-A)\vec{x} = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,1 & -0,2 \\ -0,2 & 0,7 & -0,6 \\ -0,1 & -0,1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 60 \\ 60 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 24 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Die Abteilung H müsste 2 Produktionseinheiten vom Markt beziehen, was nicht möglich ist.

c) $\begin{pmatrix} 0,5 & -0,1 & -0,2 \\ -0,2 & 0,7 & -0,6 \\ -0,1 & -0,1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow$

$$\begin{array}{rrr|r} 5 & -1 & -2 & 200 \\ -2 & 7 & -6 & 50 \\ -1 & -1 & 10 & 20 \\ \hline 5 & -1 & -2 & 200 \\ 0 & 33 & -34 & 650 \\ 0 & 9 & -26 & 10 \\ \hline 5 & -1 & -2 & 200 \\ 0 & 33 & -34 & 650 \\ 0 & 0 & 552 & 5520 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2 \cdot \mathrm{I} + 5 \cdot \mathrm{II} \\ \mathrm{II} - 2 \cdot \mathrm{III} \\ \\ \\ 9 \cdot \mathrm{II} - 33 \cdot \mathrm{III} \\ \\ \\ \Rightarrow \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{aligned} 552x_3 &= 5520 && \Rightarrow && x_3 = 10 \\ 33x_2 - 34 \cdot 10 &= 650 && \Rightarrow && x_2 = 30 && \Rightarrow \\ 5x_1 - 30 - 2 \cdot 10 &= 200 && \Rightarrow && x_1 = 50 \end{aligned}$$

Neuer Produktionsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 50 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0{,}5 & -0{,}1 & -0{,}2 \\ -0{,}2 & 0{,}7 & -0{,}6 \\ -0{,}1 & -0{,}1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20+c \\ 20+d \\ e \end{pmatrix}$, $c, d, e, x_2, x_3 \geq 0 \quad \Rightarrow$

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 30 - 0{,}1x_2 - 0{,}2x_3 \geq 20 \\ \text{II} & -12 + 0{,}7x_2 - 0{,}6x_3 \geq 20 \qquad \Rightarrow \\ \text{III} & -6 - 0{,}1x_2 + x_3 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{I} & x_3 \leq -0{,}5x_2 + 50 \\ \text{II} & x_3 \leq 1\frac{1}{6}x_2 - 53\frac{1}{3} \\ \text{III} & x_3 \geq 0{,}1x_2 + 6 \end{array}$$

Zunächst werden die in den drei Bedingungen I, II und III enthaltenen Funktionsgleichungen I', II' und III' mit verschiedenen Farben in einem x_2x_3-Diagramm grafisch dargestellt.
Dann wird der durch die Ungleichungen beschriebene Bereich farblich hervorgehoben: