

Name:

Datum:

Produktionsverflechtung - Aufgabe 19 mit Lösung

Die drei Teilbereiche U, V und W eines Werkes sind untereinander und mit dem Markt nach dem LEONTIEF-Modell verflochten. Die Abgabe von Teilbereich U an den Markt beträgt 8 Mengeneinheiten

(ME), die von V 12 ME und die von W 41 ME. Die Inputmatrix lautet $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,2 \\ 0,2 & 0 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$.

Arbeitsaufträge:

- a) Ermitteln Sie den Produktionsvektor \bar{x} . (5 BE)
- b) Skizzieren Sie das zugehörige Verflechtungsdiagramm ("Gozintograph"), wenn die Produktion von U 50 ME, die von V 40 ME und die von W 60 ME beträgt. (7 BE)
- c) In der nächsten Zeit soll bei unveränderter Inputmatrix die Produktion im Bereich W auf 80 ME gesteigert werden. Die Produktionen in den Bereichen U und V sollen so verändert werden, dass in beiden Bereichen die gleichen Mengen produziert werden.

Berechnen Sie die in den Bereichen U und V möglichen Produktionsmengen. (5 BE)

Lösung:

a)

Konsumvektor $\vec{y} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 41 \end{pmatrix}$; $(E - A) \cdot \vec{x} = \vec{y}$, also $\begin{pmatrix} 0,8 & -0,5 & -0,2 \\ -0,2 & 1 & -0,3 \\ -0,1 & -0,2 & 0,9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 41 \end{pmatrix}$

Mit Gaußverfahren

0,8	-0,5	-0,2	8	
-0,2	1	-0,3	12	
-0,1	-0,2	0,9	41	
8	-5	-2	80	$\backslash \cdot 10$
-2	10	-3	120	$\backslash \cdot 10$
-1	-2	9	410	$\backslash \cdot 10$
8	-5	-2	80	
0	35	-14	560	$\backslash I + II \cdot 4$
0	-21	70	3360	$\backslash I + III \cdot 8$
8	-5	-2	80	
0	35	-14	560	
0	0	308	18480	$\backslash II \cdot 3 + III \cdot 5$

III $308x_3 = 18480 \quad \backslash : 308$
 $x_3 = 60$

II $35x_2 - 840 = 560 \quad \backslash + 840$
 $35x_2 = 1400 \quad \backslash : 35$
 $x_2 = 40$

I $8x_1 - 200 - 120 = 80$
 $8x_1 - 320 = 80 \quad \backslash + 320$
 $8x_1 = 400 \quad \backslash : 8$
 $x_1 = 50$

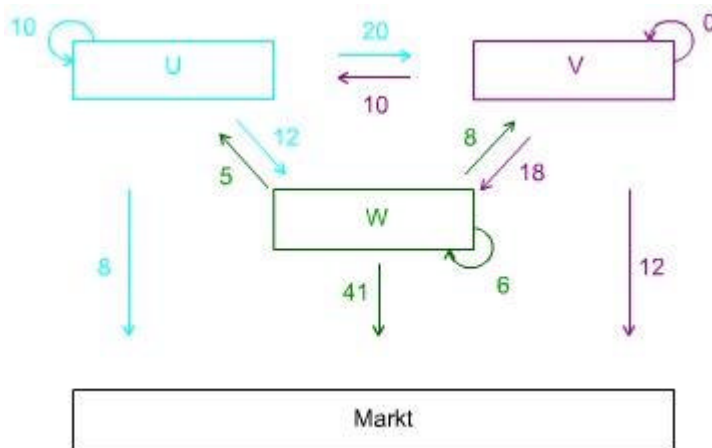
$\Rightarrow IL = \{(50 \mid 40 \mid 60)\}$, Produktionsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 50 \\ 40 \\ 60 \end{pmatrix}$

$$b) \quad A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,2 \\ 0,2 & 0 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 40 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 + 20 + 12 \\ 10 + 0 + 18 \\ 5 + 8 + 6 \end{pmatrix}$$

Input - Output - Tabelle

	U	V	W	Marktvektor	Gesamt
U	10	20	12	8	50
V	10	0	18	12	40
W	5	8	6	41	60

Gozintograph:



c) Bereich W: $x_3 = 80$

gleiche Produktion in den Bereich U und V: $x_1 = x_2$

x_1 und x_2 wird mit a ausgedrückt, wobei $a \geq 0$ ist.

$y_i \geq 0; i \in \{1, 2, 3\}$; **Konsum ist immer Positiv!!!**

Formel:

$$(E - A) \cdot \vec{x} = \vec{y}$$

In Formel einsetzen:

$$\begin{pmatrix} 0,8 & -0,5 & -0,2 \\ -0,2 & 1 & -0,3 \\ -0,1 & -0,2 & 0,9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ a \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$I \quad 0,8a - 0,5a - 16 = y_1 \geq 0$$

$$0,8a - 0,5a - 16 \geq 0 \quad | +16$$

$$0,3a \geq 16 \quad | : 0,3$$

$$a \geq 53 \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}
 \text{II} \quad & -0,2a + 1a - 24 = y_2 \geq 0 \\
 & -0,2a + 1a - 24 \geq 0 \quad | +24 \\
 & 0,8a \geq 24 \quad | : 0,8 \\
 & a \geq 30
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{III} \quad & -0,1a - 0,2a + 72 = y_3 \geq 0 \\
 & -0,1a - 0,2a + 72 \geq 0 \quad | -72 \\
 & -0,3a \geq -72 \quad | : (-0,3) \\
 & a \leq 240
 \end{aligned}$$

Antwort: Für die in den Teilbereichen U und V möglichen Produktionsmengen a gilt:

$$a \in \left[53 \frac{1}{3}; 240 \right]$$