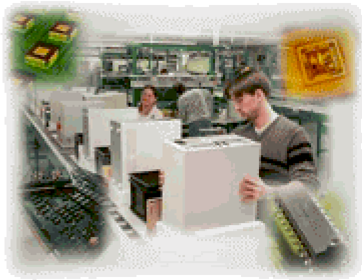
Name: **Datum:**

Produktionsverflechtung - Einstiegsaufgabe mit Lösung

Ein Unternehmen produziert in drei Zweigwerken an verschiedenen Standorten unterschiedliche Teile und Waren. Jedes Zweigwerk bezieht für die eigene Produktion Teile der Produktion der anderen Zweigwerke, nutzt aber auch Teile der eigenen Produktion. Alle Zweigwerke beliefern auch den außerbetrieblichen Markt. Die Verknüpfungen im derzeitigen Produktionszeitraum sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Diese bekannten Werte werden als Prognosewerte für zukünftige Berechnungen dienen.



	(Input)	**Abnehmer der Erzeugnisse**			
(Output)		**Werk 1**	**Werk 2**	**Werk 3**	**Markt**
Hersteller der Erzeugnisse	**Werk 1**	400	1400	1000	1200
	Werk 2	1600	2100	1500	1800
	Werk 3	1200	1400	2000	400

Arbeitsaufträge:

a) Die Stückzahlen x_1, x_2 und x_3, die von den drei Zweigwerken jeweils in einem Produktionszeitraum produziert werden, bilden den sogenannten **Produktionsvektor** $\vec{x}$.

Berechnen Sie die Stückzahlen x_1, x_2 und x_3 und stellen Sie den Produktionsvektor $\vec{x}$ für den derzeitigen Produktionszeitraum auf.

b) Für die weiteren Überlegungen ist wichtig, welche Anteile die Lieferungen der einzelnen Werke an der Gesamtproduktion der anderen Werke haben. Die Zahlen a_{ij}, $i, j = 1,2,3$ geben an, wie viel Prozent der Gesamtproduktion von Werk j durch die Lieferung von Werk i gedeckt wird. **Beispiel:** Werk 1 stellt insgesamt $400 + 1400 + 1000 + 1200 = 4000$ Einheiten her, davon kommen 1600 Einheiten von Werk 2; damit ist $a_{21} = 1600/4000 = 0{,}4 = 40\%$.
Die Zahlen a_{ij}, $i, j = 1,2,3$ bilden die sogenannte **Inputmatrix** A.

Berechnen Sie die Zahlen a_{ij}, $i, j = 1,2,3$ und stellen Sie die Inputmatrix A auf.

c) Die Stückzahlen y_1, y_2 und y_3, die von den drei Zweigwerken jeweils in einem Produktionszeitraum an den außerbetrieblichen Markt geliefert werden, bilden den sogenannten **Absatz- oder Marktvektor** $\vec{y}$.

Stellen Sie den Absatzvektor $\vec{y}$ für den derzeitigen Produktionszeitraum auf.

d) Die gesamte **Produktionsverflechtung** kann nun durch die Gleichung $\vec{x} = A \cdot \vec{x} + \vec{y}$ beschrieben werden.

*Überprüfen Sie die Richtigkeit dieser Gleichung, indem Sie die Ergebnisse der Teilaufgaben **a), b)** und **c)** in die Gleichung einsetzen.*
Erläutern Sie, warum diese Gleichung die Produktionsverflechtung beschreibt, d.h. warum sich der Produktionsvektor $\vec{x}$ als Summe von $A \cdot \vec{x}$ und $\vec{y}$ darstellen lässt.

e) Für die Zukunft wird geplant, 4000 Stück in Zweigwerk 1, 8000 Stück in Zweigwerk 2 und 5000 Stück in Zweigwerk 3 herzustellen.

*Berechnen Sie den **außerbetrieblichen Absatz**, der sich dann ergäbe.*

f) *Begründen Sie, warum der Produktionsvektor niemals $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3500 \\ 7000 \\ 2500 \end{pmatrix}$ sein kann.*

g) In der Realität ist es so, dass der Absatz auf dem Markt die Produktion bestimmt. Für unser konkretes Modell bedeutet dies, dass der Absatzvektor $\vec{y}$ in der Regel bekannt ist und berechnet werden muss, welcher Produktionsvektor $\vec{x}$ sich daraus ergibt. Für einen zukünftigen Produktionszeitraum wird der außerbetriebliche Absatz auf 2000Stück vom Zweigwerk 1, 1600Stück vom Zweigwerk 2 und 800Stück vom Zweigwerk 3 geschätzt.

Berechnen Sie den hierzu notwendigen Produktionszahlen im zukünftigen Produktionszeitraum. ***Tipp:*** *Lösen eines Linearen Gleichungssystems.*

h) Veränderungen innerhalb der Produktionsabläufe ergeben auch Änderungen der Eigenverbrauchsmengen der Zweigwerke. Auch die Marktchancen werden neu eingeschätzt. Insgesamt ergeben sich folgende Veränderungen:

$$A_{neu} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix}, \ \vec{y}_{neu} = \begin{pmatrix} y_1 \\ 800 \\ y_3 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_{neu} = \begin{pmatrix} 2500 \\ x_2 \\ 2300 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Stückzahl x_2 von Zweigwerk 2 sowie die Outputs y_1 und y_3 auf den Markt für Zweigwerk 1 und Zweigwerk 3.

i) Für die Zukunft wird damit gerechnet, dass sich die Marktchancen der Zweigwerke gegenseitig beeinflussen und sich die Absatzmengen auf dem Markt wie folgt verhalten: $\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} 11t \\ 200 \\ 196 - t^2 \end{pmatrix}$. Dabei ist $t \in IR^+$ eine durch betriebsinterne Zusammenhänge festgelegte Größe.

Berechnen Sie, welche Stückzahlen (in Abhängigkeit vom Parameter t) produziert werden müssen, damit der Markt gedeckt werden kann.

j) *Berechnen Sie, für welchen Wert von $t \in IR^+$ der gesamte außerbetriebliche Absatz aller 3 Zweigwerke am größten wird.*

Quelle: http://www.learn-line.nrw.de/angebote/selma/foyer/projekte/projekthamm3.htm

Lösung:

Spalte: Input

Zeile: Output

=	Zw 1	Zw 2	Zw 3	Markt	Gesamt-Output
Zw 1	400	1400	1000	1200	**4000**
Zw 2	1600	2100	1500	1800	**7000**
Zw 3	1200	1400	2000	400	**5000**

Die Zeilensumme der Tabelle gibt den gesamten Output eines Zweigwerkes an. Davon braucht es einen Teil selber,der Rest geht an die anderen Zweigwerke und in den Markt .

z. B. : bekommt Zweigwerk 1 für die Produktion von 4000 Gütern von sich selbst: $\frac{400}{4000} = 0{,}1$

von Zw 2: $\frac{1600}{4000} = 0{,}4$

von Zw 3: $\frac{1200}{4000} = 0{,}3$

Das ergibt insgesamt folgende **Input-Matrix A**: $A := \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}$

Ausserbetrieblichen Absatz im vergangenen Produktionszeitraum:

Der **Absatzvektor** $\vec{y}$ berechnet sich durch $\vec{y} = \vec{x} - A \cdot \vec{x}$, wobei $\vec{x}$ der **Produktionsvektor** ist.

$x := \begin{bmatrix} 4000 \\ 8000 \\ 5000 \end{bmatrix}$ Der Absatzvektor war: $y := x - A \cdot x \rightarrow \begin{bmatrix} 1000.0 \\ 2500.0 \\ 200.0 \end{bmatrix}$

Produktionsvektor im zukünftigen Produktionszeitraum:

Einheitsmatrix : $E := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $D := (E - A) \rightarrow \begin{bmatrix} .9 & -.2 & -.2 \\ -.4 & .7 & -.3 \\ -.3 & -.2 & .6 \end{bmatrix}$

Output der einzelnen Zweigwerke auf dem Markt; **Absatzvektor** $y := \begin{bmatrix} 2000 \\ 1600 \\ 800 \end{bmatrix}$

neuer Produktionsvektor: $x = D^{-1} \cdot y \quad \begin{bmatrix} 5680.0000000000000000 \\ 8540.0000000000000000 \\ 7020.0000000000000000 \end{bmatrix}$

Veränderung der Produktionsabläufe

Neue Inputmatrix

$$Aneu := \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.1 \\ 0.3 & 0.5 & 0.4 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 \end{bmatrix}$$

Neuer Produktionsvektor

$$xneu := \begin{bmatrix} 2500 \\ x2n \\ 2300 \end{bmatrix}$$

Neuer Absatzvektor

$$yneu := \begin{bmatrix} y1n \\ 800 \\ y3n \end{bmatrix}$$

Berechnung von x2n:

$$(E - Aneu) \rightarrow \begin{bmatrix} .8 & -.3 & -.1 \\ -.3 & .5 & -.4 \\ -.1 & -.2 & .7 \end{bmatrix}$$

$$(E - Aneu) \cdot xneu \rightarrow \begin{bmatrix} 1770.0 - .3 \cdot x2n \\ -1670.0 + .5 \cdot x2n \\ 1360.0 - .2 \cdot x2n \end{bmatrix}$$

$$-1670.0 + .5 \cdot x2n = 800 \text{ auflösen}, x2n \rightarrow 4940.$$

$x2n = 4940$

Berechnung von y1n, y3n:

Zu lösen ist die Gleichung: $(E - A_{neu})^{-1} \cdot \vec{y}_{neu} = \vec{x}_{neu}$

$$xneu := \begin{bmatrix} 2500 \\ 4940 \\ 2300 \end{bmatrix} \qquad (E - Aneu)^{-1} = \begin{bmatrix} 2.077 & 1.769 & 1.308 \\ 1.923 & 4.231 & 2.692 \\ 0 & 1.462 & 2.385 \end{bmatrix}$$

$$\text{llösen}\left[(E - Aneu)^{-1}, xneu\right] = \begin{bmatrix} 288 \\ 800 \\ 372 \end{bmatrix}$$

Probe :

$$(E - Aneu)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 288 \\ 800 \\ 372 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2500 \\ 4940 \\ 2300 \end{bmatrix}$$

Weitere Absatzvektoren: **Zugehörige Produktionsvektoren:**

$$y1 := \begin{bmatrix} 1000 \\ 1600 \\ 1200 \end{bmatrix} \qquad (E - A)^{-1} \cdot y1 = \begin{bmatrix} 4280 \\ 7590 \\ 6670 \end{bmatrix}$$

$$y2 := \begin{bmatrix} 1500 \\ 1000 \\ 1200 \end{bmatrix} \qquad (E - A)^{-1} \cdot y2 = \begin{bmatrix} 4700 \\ 6975 \\ 6675 \end{bmatrix}$$

$$y3 := \begin{bmatrix} 800 \\ 1000 \\ 2200 \end{bmatrix} \qquad (E - A)^{-1} \cdot y3 = \begin{bmatrix} 4440 \\ 7570 \\ 8410 \end{bmatrix}$$

Neuer Absatzvektor

$$y2 := \begin{bmatrix} 11\,t \\ 200 \\ 196 - t^2 \end{bmatrix}$$

Neuer Produktionsvektor

$$x2 := (E - A)^{-1} \cdot y2 \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{99}{5} \cdot t + 356 - t^2 \\ \frac{363}{20} \cdot t + 823 - \frac{7}{4} \cdot t^2 \\ \frac{319}{20} \cdot t + 779 - \frac{11}{4} \cdot t^2 \end{bmatrix}$$

Summe der Produktion in Abhängigkeit von t:

$$f(t) := \frac{319}{20} \cdot t + 779 - \frac{11}{4} \cdot t^2 + \left(\frac{363}{20} \cdot t + 823 - \frac{7}{4} \cdot t^2\right) + \left(\frac{99}{5} \cdot t + 356 - t^2\right) \rightarrow \frac{539}{10} \cdot t + 1958 - \frac{11}{2} \cdot t^2$$

Ableitungen: $f1(t) := \left(\frac{d}{dt} f(t)\right) \rightarrow \frac{539}{10} - 11 \cdot t$ $\quad f2(t) := \frac{d}{dt} f1(t) \rightarrow -11$

Extremum suchen: $\frac{539}{10} - 11 \cdot t = 0$ auflösen, t $\rightarrow \frac{49}{10}$

$f2\left(\frac{49}{10}\right) = -11$ 2.Ableitung ist an der Stelle $\frac{49}{10}$ kleiner Null.

An der Stelle $\frac{49}{10}$ liegt also ein Maximum der Funktion f vor.