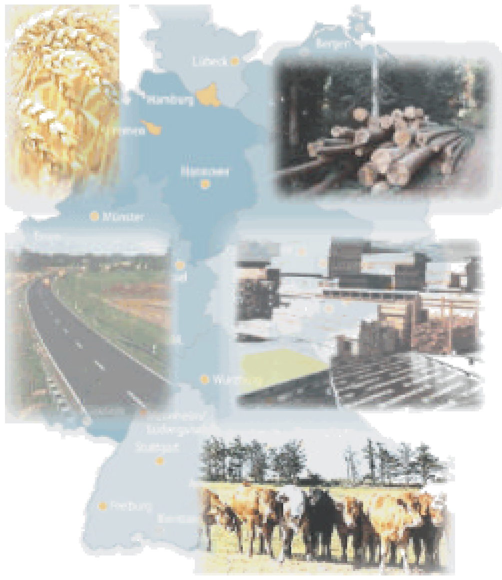
Name: **Datum:**

Volkswirtschaftliche Gesamtrechnung - Aufgabe mit Lösung



Die monetären **Input-Output-Tabellen** des statistischen Bundesamt in Wiesbaden gehören zum Programm der Volkswirtschaftlichen Gesamtrechnung. Sie geben einen detaillierten Einblick in die Güterströme und Produktionsverflechtungen in der Volkswirtschaft und mit der übrigen Welt. Diese Input-Output-Tabellen setzten sich aus **drei Quadranten** zusammen:
In **Quadrant I** werden die **Produktionsverflechtungen** an Gütern aus inländischer Produktion und aus Importen dargestellt, wobei nach verschiedenen Gütergruppen bzw. Produktionsbereichen unterschieden wird, die man in verschiedene **Sektoren** (siehe Tabelle: z.B. der Sektor „Land- und Forstwirtschaft" oder „Bergbau und Energie",...) einteilen kann: Die unten stehende Tabelle führt drei Sektoren (1, 2 und 3) aus diesem 1. Quadranten auf.
In **Quadrant II** werden die Güter nach der **letzten Verwendung** in verschiedene Bereiche (Konsumausgaben privater Haushalte im Inland, Konsumausgaben des Staates, Ausrüstungen, Bauinvestitionen und Exporten) aufgegliedert. Die letzte Spalte der unten stehenden Tabelle stellt einen Teilbereich dar.
Der **Quadrant III** stellt dar, wie sich das **gesamte Aufkommen** zusammensetzt. Die unten stehende Tabelle enthält zu diesem Quadranten keine Angaben.

Für drei Sektoren einer Volkswirtschaft ergeben sich für ein bestimmtes Jahr die in der folgenden Tabelle notierten Daten. Die Zahlen in der Tabelle sind die Preise der Gütermengen in einer Geldeinheit (z.B. Milliarden €). „294" in der Zeile „Sektor 1" und in der Spalte „Sektor 2" bedeutet somit: Zur Befriedigung des Privatkonsums im Inland auf dem Sektor 2 erhielt der 2.Sektor von 1.Sektor Waren oder Leistungen im Wert von insgesamt 294 Geldeinheiten.

		(Verwendung)			
		Sektor 1	**Sektor 2**	**Sektor 3**	**Privater Konsum im Inland**
(Aufkommen)	**Sektor 1**	158	294	1008	120
	Sektor 2	474	588	168	240
	Sektor 3	1106	294	1680	280

Arbeitsaufträge:

a) Das **Gesamtaufkommen** der drei Sektoren **zur Befriedigung des Privatkonsums im Inland** wird durch den **Produktionsvektor** $\vec{x}_K = \begin{pmatrix} x_{K1} \\ x_{K2} \\ x_{K3} \end{pmatrix}$ dargestellt, wobei z.B. x_{K1} für das Gesamtaufkommen des Sektors 1 steht.

Stellen Sie den Produktionsvektor $\vec{x}_K$ *auf.*

b) Die Zahl a_{ij} ist der Anteil am Gesamtaufkommen des Sektors j zur Befriedigung des Inlandkonsums, den Sektor j von Sektor i verwendet (benötigt). Die Zahlen a_{ij} $i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3)$ bilden die **Inputmatrix** oder **Technologiematrix A.**

Stellen Sie die Technologiematrix A auf.

Kontrollergebnis: $A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}05 \\ 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}$

c) Bezeichnet man die Spalte „Privater Konsum im Inland" als **Absatzvektor** $\vec{y}_K = \begin{pmatrix} y_{K1} \\ y_{K2} \\ y_{K3} \end{pmatrix}$**,** so kann der Güterstrom zur Befriedigung der Inlandsnachfrage in dem betrachteten Zeitraum durch die Gleichung $\vec{x}_K = A \cdot \vec{x}_K + \vec{y}_K$ beschrieben werden.

Zeigen Sie, dass die berechneten Größen diese Gleichung erfüllen.

d) Das **Gesamtaufkommen zur Befriedigung des <u>E</u>xports** sei durch folgende Daten gegeben: $x_{E1} = 1500; x_{E2} = 1500; x_{E3} = 3000$.

*Bestimmen Sie den Absatzvektor $\vec{y}_E$ für den Export für diesen Zeitraum unter der Annahme, dass der Zusammenhang zwischen $\vec{y}_E$ und $\vec{x}_E$ durch die Gleichung $\vec{x}_E = A \cdot \vec{x}_E + \vec{y}_E$ mit der im Aufgabenteil **b)** bestimmten Technologiematrix beschrieben wird.*

e) Für das **nächste Jahr** wird erwartet, dass der private Konsum im Inland um 5% und der Export um 3% steigt.

e1) *Zeigen Sie, dass dann für den „gesamten" Absatzvektor (Export und Inlandskonsum) gilt:*

$\vec{y}_{G\ Neu} = \begin{pmatrix} 280{,}5 \\ 561 \\ 448{,}5 \end{pmatrix}$.

e2) *Berechnen Sie, wie groß dann der „gesamte" Produktionsvektor $\vec{x}_{G\ Neu}$ sein muss, um die Nachfrage für Inland **und** Export zu befriedigen.*

Kontrolle: $\vec{x}_{G\ Neu} = \begin{pmatrix} 3204 \\ 3088{,}5 \\ 6618 \end{pmatrix}$.

e3) *Bestimmen Sie die prozentuale Veränderung des Produktionsvektors.*

Quelle: http://www.learn-line.nrw.de/angebote/selma/foyer/projekte/projekthamm3.htm

Lösung:

a) Produktionsvektor (Gesamtaufkommen) für den Inlandskonsum:

Sektor 1: $x_{K1} = 158 + 294 + 1008 + 120 = 1580$

Sektor2: $x_{K2} = 474 + 588 + 168 + 240 = 1470$

Sektor3: $x_{K3} = 1106 + 294 + 1680 + 280 = 3360$

$$\vec{x}_K = \begin{pmatrix} 1580 \\ 1470 \\ 3360 \end{pmatrix}$$

b) Technologiematrix:

$a_{1,1} = 158/1580 = 0{,}1$

$a_{1,2} = 294/1470 = 0{,}2$ *: der 2.Sektor erhält vom 1.Sektor Leistungen im Wert von 294 Geldeineinheiten, das Gesamtaufkommen des 2. Sektors zur Befriedigung des Inlandskonsums liegt bei 1470 Geldeinheiten.*

Die restlichen Matrixelemente berechnet man analog, die Matrix A ist auf dem Arbeitsblatt angegeben.

c) $\vec{x}_K = A \cdot \vec{x}_K + \vec{y}_K$.

1. Zeile: $1580 = 0{,}1 \cdot 1580 + 0{,}2 \cdot 1470 + 0{,}3 \cdot 3360 + 120 \Leftrightarrow 1580 = 1580 \text{ (wahre Aussage)}$

Die Rechnungen zur 2. und zur 3. Zeile verlaufen analog.

d) Absatzvektor für den Export

$$\vec{x}_E = A \cdot \vec{x}_E + \vec{y}_E \Leftrightarrow \vec{y}_E = \vec{x}_E - A \cdot \vec{x}_E \Leftrightarrow \vec{y}_E = \begin{pmatrix} 1500 \\ 1500 \\ 3000 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}05 \\ 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1500 \\ 1500 \\ 3000 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \vec{y}_E = \begin{pmatrix} 1500 \\ 1500 \\ 3000 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1350 \\ 1200 \\ 2850 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{y}_E = \begin{pmatrix} 150 \\ 300 \\ 150 \end{pmatrix}$$

e1) Neuer Absatzvektor für den Export: $\vec{y}_{E\text{ Neu}} = 103\% \cdot \begin{pmatrix} 150 \\ 300 \\ 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 154{,}5 \\ 309 \\ 154{,}5 \end{pmatrix}$.

Neuer Absatzvektor für den Inlandskonsum: $\vec{y}_{K\text{ Neu}} = 105\% \cdot \begin{pmatrix} 120 \\ 240 \\ 280 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 126 \\ 252 \\ 294 \end{pmatrix}$

Neuer Gesamtabsatz: $\vec{y}_{G\text{ Neu}} = \vec{y}_{K\text{ Neu}} + \vec{y}_{E\text{ Neu}} = \begin{pmatrix} 280{,}5 \\ 561 \\ 448{,}5 \end{pmatrix}$

e2) Auch in diesem Aufgabenteil muss man davon ausgehen, dass für das kommende Jahr der Absatz im Inland und der Export durch Produktionsvektoren $\vec{x}_{K\ Neu}$ und $\vec{x}_{E\ Neu}$ beschrieben werden, die den Gleichungen $\vec{x}_{K\ Neu} = A \cdot \vec{x}_{K\ Neu} + \vec{y}_{K\ Neu}$ und $\vec{x}_{E\ Neu} = A \cdot \vec{x}_{E\ Neu} + \vec{y}_{E\ Neu}$ genügen; addiert man beide Gleichungen, so erhält man die Gleichung $\vec{x}_{G\ Neu} = A \cdot \vec{x}_{G\ Neu} + \vec{y}_{G\ Neu}$, wobei $\vec{x}_{G\ Neu} = \vec{x}_{K\ Neu} + \vec{x}_{E\ Neu}$ gesetzt wird. Der Vektor $\vec{x}_{G\ Neu}$ ist der „gesuchte" Vektor zum neuen Gesamtaufkommen.

Rechnung: $\vec{x}_{G\ Neu} = A \cdot \vec{x}_{G\ Neu} + \vec{y}_{G\ Neu} \Leftrightarrow \vec{x}_{G\ Neu} - A \cdot \vec{x}_{G\ Neu} = \vec{y}_{G\ Neu}$;

Bezeichnet man die 3 Komponenten von $\vec{x}_{G\ Neu}$ mit x_1, x_2 und x_3, so entspricht die zuletzt notierte Vektorgleichung dem Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x_1 - 0{,}1 \cdot x_1 - 0{,}2 \cdot x_2 - 0{,}3 \cdot x_3 = 280{,}5 \\ x_2 - 0{,}3 \cdot x_1 - 0{,}4 \cdot x_2 - 0{,}05 \cdot x_3 = 561 \\ x_3 - 0{,}7 \cdot x_1 - 0{,}2 \cdot x_2 - 0{,}5 \cdot x_3 = 448{,}5 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} 0{,}9 \cdot x_1 - 0{,}2 \cdot x_2 - 0{,}3 \cdot x_3 = 280{,}5 \\ -0{,}3 \cdot x_1 + 0{,}6 \cdot x_2 - 0{,}05 \cdot x_3 = 561 \\ -0{,}7 \cdot x_1 - 0{,}2 \cdot x_2 + 0{,}5 \cdot x_3 = 448{,}5 \end{pmatrix}$$

oder in einer abkürzenden Schreibweise

$$\left(\begin{array}{ccc|c} +0{,}9 & -0{,}2 & -0{,}3 & 280{,}5 \\ -0{,}3 & +0{,}6 & -0{,}05 & 561 \\ -0{,}7 & -0{,}2 & +0{,}5 & 448{,}5 \end{array}\right) \begin{array}{l} *7 \\ *21 \\ *9 \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} +6{,}3 & -1{,}4 & -2{,}1 & 1963{,}5 \\ -6{,}3 & +12{,}6 & -1{,}05 & 11781 \\ -6{,}3 & -1{,}8 & +4{,}5 & 4036{,}5 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & +11{,}2 & -3{,}13 & 13744{,}5 \\ 0 & -3{,}2 & +2{,}4 & 6000 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{Glg } 4: \text{Glg } 1 + \text{Glg } 2 \\ \text{Glg } 5: \text{Glg } 1 + \text{Glg } 3 \end{array} \left| \begin{array}{l} *2 \\ *7 \end{array}\right.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & +22{,}4 & -6{,}3 & 27489 \\ 0 & -22{,}4 & +16{,}8 & 42000 \end{array}\right)$$

$$\text{Glg } 6: \text{Glg }.5 + \text{Glg } 4: \ 10{,}5 \cdot x_3 = 69489 \Leftrightarrow x_3 = 6618$$

$$\text{Glg}.7: \text{Glg}.\ 6 \text{ in Glg }.5: \ -3{,}2 \cdot x_2 + 2{,}4 \cdot 6618 = 6000 \Leftrightarrow x_2 = 3088{,}5$$

$$\text{Glg}.\ 8: \text{Glg}.7 \wedge \text{Glg}.6 \text{ in Glg}.1: 0{,}9 \cdot x_1 - 0{,}2 \cdot 3088{,}5 - 0{,}3 \cdot 6618 = 280{,}5 \Leftrightarrow x_1 = 3204$$

e3) Alter Gesamtproduktionsvektor (siehe **a)** und **d)**): $\vec{x}_G = \vec{x}_K + \vec{x}_E = \begin{pmatrix} 3080 \\ 2970 \\ 6360 \end{pmatrix}$

Differenz:

$$\vec{x}_{G\ Neu} - \vec{x}_G = \begin{pmatrix} 124 \\ 118{,}5 \\ 258 \end{pmatrix}$$

Prozentuale Erhöhungen :

1. Sektor: $124/3080 \approx 4{,}03\%$;2. Sektor: $118{,}5/2970 \approx 3{,}99\%$

3. Sektor: $258/630 \approx 4{,}06\%$