Name: **Datum:**

Übergangsprozesse - Altersstufen - Aufgabe mit Lösung

Bei einer Tierart werden drei Altersstufen (Jungtiere A_1, ausgewachsene Tiere A_2 und Alttiere A_3) unterschieden. Die Matrix M mit $v_1,\ v_2 \geq 0$ beschreibt die jährlichen Veränderungen einer Population dieser Tierart: $M = \begin{pmatrix} 0 & v_1 & v_2 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$

Arbeitsaufträge:

a) *Erläutern Sie die Bedeutung von* v_1 *und* v_2 *für die Entwicklung der Population.*

b) *Berechnen Sie, wie* v_1 *zu wählen ist, falls jedes Tier der Alterstufe* A_2 *entweder selbst die Altersstufe* A_3 *erreicht oder aber stirbt und genau ein Jungtier als Nachfolger hinterlässt.*

c) *Zeigen Sie, dass es für* $v_1 = 0$ *einen Wert von* v_2 *gibt, für den sich jede mögliche Altersverteilung der Tiere nach jeweils drei Jahren wiederholt, und geben Sie diesen Wert von* v_2 *an.*

d) *Bestimmen Sie für* $v_1 = \frac{2}{3}$ *den Wert von* v_2 *so, dass es eine Altersverteilung gibt, die sich jährlich reproduziert. Berechnen Sie, wie viele Tiere bei dieser Altersverteilung und insgesamt* 120 *Tieren den einzelnen Altersstufen* A_1, A_2 *und* A_3 *angehören.*

Lösung:

a) v_1 (bzw. v_2) gibt an, wie die Anzahl / der Anteil der Jungtiere im nächsten Jahr von der Anzahl / dem Anteil der ausgewachsenen Tiere (bzw. der Alttiere) im aktuellen Jahr abhängt. Je größer v_1 bzw. v_2 ist, desto mehr Jungtiere gibt es im nachfolgenden Jahr.

b) $v_1 = \frac{2}{3}$ (Spaltensumme=1).

c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & v_2 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & v_2 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3}v_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}v_2 \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3}v_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}v_2 \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & v_2 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}v_2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6}v_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6}v_2 \end{pmatrix}$;

$\frac{1}{6}v_2 = 1 \Leftrightarrow v_2 = 6$ (Einheitsmatrix ist neutrales Element der Matrizenmultiplikation)

d) Die Bedingung $\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & v_2 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ lässt sich als LGS schreiben:

$$\left| \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & \frac{2}{3}y & + & v_2 z & = & 0 \\ \frac{1}{2}x & - & y & & & = & 0 \\ & & \frac{1}{3}y & - & z & = & 0 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & \frac{2}{3}y & + & v_2 z & = & 0 \\ & - & \frac{2}{3}y & + & \frac{1}{2}v_2 z & = & 0 \\ & & & & \left(\frac{1}{4}v_2 - 1\right)z & = & 0 \end{array} \right|$$

Dieses hat für $v_2 = 4$ (nichttriviale) Lösungen der Form $(6z;\ \ 3z;\ \ z)$. $6z + 3z + z = 120 \Leftrightarrow z = 12$

Bei der stabilen Altersverteilung gehören 72 Tiere A_1, 36 Tiere A_2 und 12 Tiere A_3 an.