

## Übergangsprozesse - Bevölkerungsschichten - Aufgabe mit Lösung

Die Bevölkerung eines Landes kann man grob in die drei Klassen Oberschicht (OS), Mittelschicht (MS) und Unterschicht (US) einteilen.

In statistischen Erhebungen hat man festgestellt, dass die Kinder von Angehörigen einer bestimmten Schicht als zukünftige Eltern nicht unbedingt auch dieser Schicht angehören.

Für eine Modellrechnung nimmt man an, dass sich in einem bestimmten Land derzeit 10% der Bevölkerung in der Oberschicht, 60% in der Mittelschicht und 30% in der Unterschicht befinden. Weiterhin wird zunächst angenommen, dass jede Familie genau zwei Kinder hat.



Für die Zugehörigkeit der Kinder zu einer der drei Schichten in Abhängigkeit von der Elternschicht kann man vereinfacht folgende Übergangsmatrix annehmen :

$$M = \begin{array}{cc} & \text{Eltern} \\ & \begin{array}{ccc} \text{OS} & \text{MS} & \text{US} \end{array} \\ \text{Kind} & \begin{array}{ccc} \text{OS} & \left( \begin{array}{ccc} 55\% & 10\% & 5\% \end{array} \right) \\ \text{MS} & \left( \begin{array}{ccc} 40\% & 70\% & 15\% \end{array} \right) \\ \text{US} & \left( \begin{array}{ccc} 5\% & 20\% & 80\% \end{array} \right) \end{array} \end{array}$$

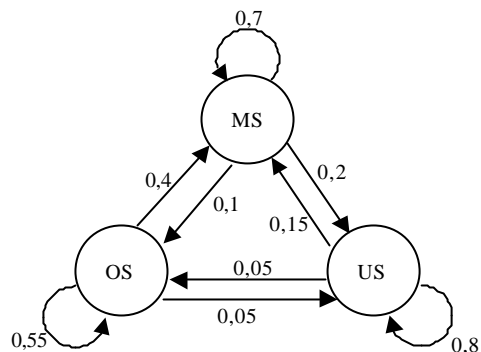
d.h. also z.B., dass sich 15% der Kinder von Eltern der Unterschicht später als Elternteil in der Mittelschicht befinden werden.

### Arbeitsaufträge:

- Zeichnen Sie einen geeigneten Übergangsgraphen.
- Bestimmen Sie die Bevölkerungsverteilung der Kinder von 4200 (repräsentativ ausgewählten) Familien.
- Berechnen Sie unter diesen Modellannahmen die Bevölkerungsverteilung der Eltern dieser 4200 Familien.
- Modifizieren Sie die Übergangsmatrix so, dass sie die Situation beschreibt, dass Familien der Oberschicht nur jeweils ein Kind, Familien der Mittelschicht zwei Kinder und Familien der Unterschicht drei Kinder haben.

**Lösung:**

a) Der Übergangsgraph könnte folgendermaßen aussehen:



b) Als Ausgangsverteilung wählt man den Vektor  $B_1 = \begin{pmatrix} 420 \\ 2520 \\ 1260 \end{pmatrix}$ . Damit ergibt sich für die Kindergenera-

tion die Verteilung  $B_2 = M \cdot B_1 = \frac{1}{100} \cdot \begin{pmatrix} 55 & 10 & 5 \\ 40 & 70 & 15 \\ 5 & 20 & 80 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 420 \\ 2520 \\ 1260 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 546 \\ 2121 \\ 1533 \end{pmatrix}$ , also gehören zukünftig 1092

Kinder der Oberschicht, 4242 Kinder der Mittelschicht und 3066 Kinder der Unterschicht an.

c) Setzt man  $B_0 = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$  als Verteilung der Eltern, dann ist das lineare Gleichungssystem  $M \cdot B_0 = B_1$

und somit  $\frac{1}{100} \cdot \begin{pmatrix} 55 & 10 & 5 \\ 40 & 70 & 15 \\ 5 & 20 & 80 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 420 \\ 2520 \\ 1260 \end{pmatrix}$  zu lösen. Das GAUSSsche Eliminationsverfahren

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 55 & 10 & 5 & 42000 \\ 40 & 70 & 15 & 252000 \\ 5 & 20 & 80 & 126000 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 11 & 2 & 1 & 8400 \\ 8 & 14 & 3 & 50400 \\ 1 & 4 & 16 & 25200 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 11 & 2 & 1 & 8400 \\ 0 & 138 & 25 & 487200 \\ 0 & 42 & 175 & 268800 \end{array} \right] \Leftrightarrow$$

liefert:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 11 & 2 & 1 & 8400 \\ 0 & 138 & 25 & 487200 \\ 0 & 0 & 23100 & 16632000 \end{array} \right] \Leftrightarrow \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 3400 \\ 720 \end{pmatrix}$$

Nach diesem Modell entstammen also 80 Elternpaare der Oberschicht, 3400 der Mittelschicht und 720 der Unterschicht.

d) Durch die geringere Zahl an Kindern, die in der Oberschicht geboren werden und die höhere Zahl der Kinder aus der Unterschicht ist die Übergangsmatrix so zu modifizieren, dass die Übergangsfaktoren für die Eltern aus der Oberschicht halbiert und die Übergangsfaktoren für die Eltern aus der Unter-

schicht mit 1,5 multipliziert werden müssen:  $M' = \frac{1}{200} \cdot \begin{pmatrix} 55 & 20 & 15 \\ 40 & 140 & 45 \\ 5 & 40 & 240 \end{pmatrix}$