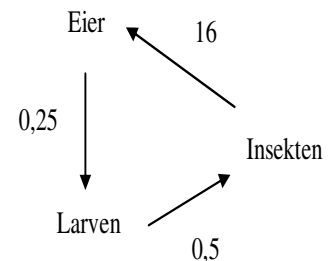


Insektenpopulation

Modellhaft lässt sich die Entwicklung einer bestimmten Insektenpopulation folgendermaßen beschreiben:

Aus Eiern dieser Insektenart entwickeln sich zunächst innerhalb eines Monats Larven, die innerhalb eines Monats zu Insekten werden. Die Insekten legen wiederum nach einem Monat Eier und sterben anschließend.

Aus Beobachtungen von Biologen weiß man, dass aus 25% der Eier, die ein Insekt legt, Larven werden (die anderen 75% werden gefressen oder verenden) und dass sich die Hälfte der Larven zu vollständigen Insekten entwickelt (die andere Hälfte stirbt oder wird gefressen). Außerdem legt ein Insekt durchschnittlich 16 Eier.



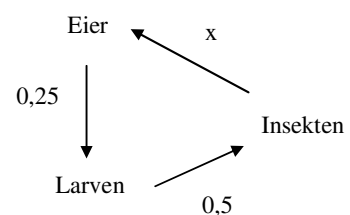
a) Zu einem bestimmten Zeitpunkt werden 40 Eier, 20 Larven und 12 Insekten gezählt. Untersuchen Sie, wie sich die Anzahlen der Eier, Larven und Insekten im Laufe von 6 Monaten entwickelt. Schreiben Sie dazu die erste Rechnung in der Matrizenschreibweise auf und füllen Sie die nebenstehende Tabelle aus.

Beginn des	Eier	Larven	Insekten
1. Monats	40	20	12
2. Monats			
3. Monats			
4. Monats			
5. Monats			
6. Monats			
7. Monats			

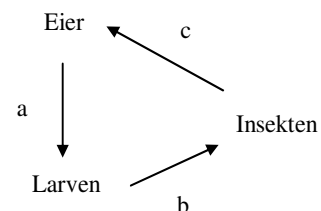
b) Die Populationen entwickeln sich in Form eines 3-monatigen Zyklus. Begründen Sie diese Aussage anhand Ihrer Tabelle. Berechnen Sie dann jeweils die Anzahlen der Eier, Larven bzw. Insekten nach einem Jahr und nach zwei Jahren.

c) Zur Bekämpfung der Populationen steht ein Insektizid zur Verfügung, das die Fortpflanzung der Insekten so beeinflusst, dass ein Insekt nur noch eine kleinere Zahl von Eiern ablegt.

Bestimmen Sie die Anzahl an Eiern, die ein Insekt ablegen darf, wenn die Insektenpopulation langfristig stabil sein soll.



Tipp: Betrachten Sie die Entwicklung der Insektenpopulation unter der Bedingung, dass ein Insekt x Eier ablegt.



d) Die Insektenpopulation soll langfristig stabil bleiben. Leiten Sie einen Zusammenhang zwischen den Parametern a , b und c her, der diese langfristige Stabilität sichert.

e) Bilden Sie die dritte Potenz der in der Teilaufgabe (a) aufgestellten Übergangsmatrix. Begründen Sie damit die im Aufgabenteil (b) beschriebene zyklische Populationsentwicklung.

Lösung

a)

Die Übergangsmatrix ist gegeben durch $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 16 \\ 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$

$$\text{Beginn des 2.Monats } A \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 192 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}; \text{ Beginn des 3.Monats } A \cdot \begin{pmatrix} 192 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 160 \\ 48 \\ 5 \end{pmatrix};$$

$$\text{Beginn des 4.Monats } A \cdot \begin{pmatrix} 160 \\ 48 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 40 \\ 24 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 12 \end{pmatrix}; \text{ Beginn des 5.Monats } A \cdot \begin{pmatrix} 80 \\ 40 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 384 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix};$$

$$\text{Beginn des 6.Monats } A \cdot \begin{pmatrix} 384 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 320 \\ 96 \\ 10 \end{pmatrix}; \text{ Beginn des 7.Monats } A \cdot \begin{pmatrix} 320 \\ 96 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 160 \\ 80 \\ 48 \end{pmatrix} = 2^2 \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 12 \end{pmatrix}$$

b) Die Anzahl von Eier, Larven und Insekten verdoppelt sich alle drei Monate.

$$\text{Nach einem Jahr bedeutet: Zu Beginn des 13.Monats, also } 2^4 \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 640 \\ 320 \\ 192 \end{pmatrix}$$

$$\text{Nach zwei Jahren bedeutet: Zu Beginn des 25. Monats, also } 2^8 \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10240 \\ 5120 \\ 3072 \end{pmatrix}$$

c) Langfristige Stabilität bedeutet:

$$A_{\text{neu}} \cdot \vec{v} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{I. } v_3 \cdot x = v_1 \quad ; \quad \text{II. } 0,25v_1 = v_2 \quad ; \quad \text{III. } 0,5v_2 = v_3 : \text{ Es folgt } x = \frac{v_1}{v_3} = \frac{4v_2}{0,5v_2} = 8$$

Ein Insekt darf 8 Eier legen, damit die Population langfristig stabil bleibt.

d)

$$\text{Es soll gelten } A^n = E, \text{ also } \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & bc & 0 \\ 0 & 0 & ac \\ ab & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A \cdot A \cdot A &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & bc & 0 \\ 0 & 0 & ac \\ ab & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} abc & 0 & 0 \\ 0 & abc & 0 \\ 0 & 0 & abc \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Gilt $a \cdot b \cdot c = 1$, so ist die Insektenpopulation langfristig stabil.

e)

$$\begin{aligned} A^{3n} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 16 \\ 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 16 \\ 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 16 \\ 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 16 \\ 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0,125 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 16 \\ 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot E \end{aligned}$$

Induktiv würde folgen: $A^{3n} = 2^n \cdot E$