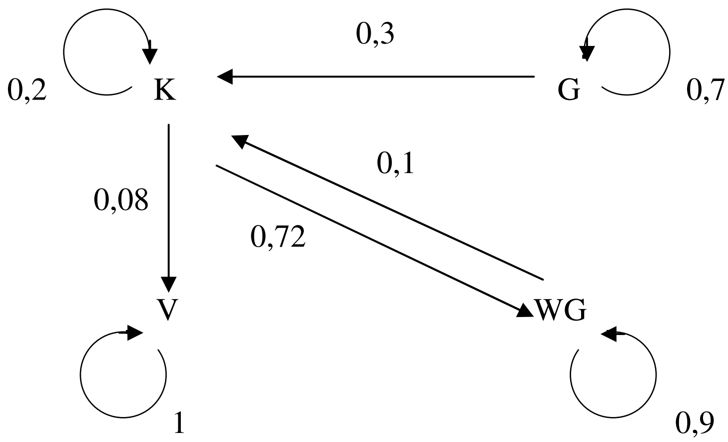
Aufg.-Nr.: 20	Bereich: Übergangsmatrizen	Kursart: LK	CAS

Krankheit

In dieser Aufgabe soll der Verlauf einer Krankheit in einer Population untersucht werden.

Die Behandlung der Krankheit ist nicht immer erfolgreich: 8% der Erkrankten sterben an ihr. Die wieder Genesenen haben aufgrund erhöhter Abwehrkräfte eine geringere Wahrscheinlichkeit erneut zu erkranken als diejenigen, die noch nicht erkrankt waren.

Das nachfolgende Diagramm gibt die vollständige Beschreibung der Übergänge für eine Zeiteinheit von einer Woche wieder.



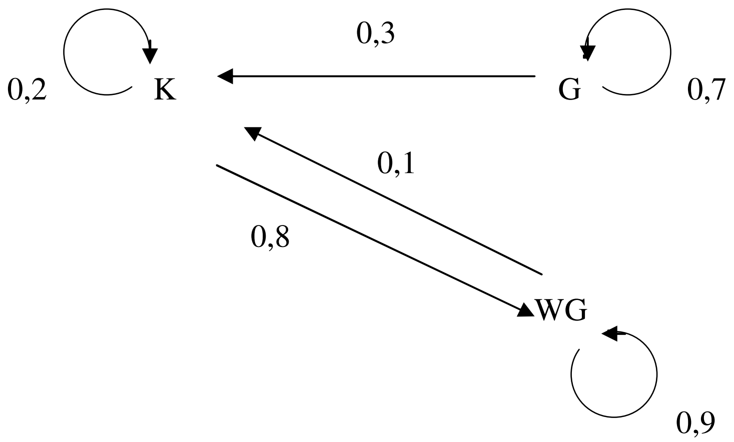
a) Bestimmen Sie die Übergangsmatrix A.

b)
   b1) Berechnen Sie die Übergangsmatrix für einen Zeitraum von 5 Wochen.
   b2) Geben Sie an, wie viel Prozent der anfangs Gesunden auch noch nach 5 Wochen gesund sind.
   b3) Nennen Sie den Prozentsatz derjenigen, die anfangs gesund waren und innerhalb dieser 5 Wochen gestorben sind.

c) In einer Siedlung von 1500 Personen bricht die Krankheit aus.
   c1) Beschreiben Sie die Situation in dieser Siedlung nach 3 Wochen.
   c2) Untersuchen Sie, welche langfristige Entwicklung bei gleich bleibenden Übergangswahrscheinlichkeiten in dieser Siedlung zu erwarten ist.

bitte wenden!

d) Im folgenden soll davon ausgegangen werden, dass sich die medizinischen Behandlungsmethoden soweit verbessert haben, dass niemand mehr an dieser Krankheit stirbt und dass 80% der Erkrankten innerhalb einer Woche wieder gesund werden:



d1) Geben Sie eine vereinfachte 3x3-Übergangsmatrix B an.

d2) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix B.

Erneut bricht in einer Population von 1500 Personen die Krankheit aus.

d3) Beschreiben Sie explizit den Verlauf des Krankenstandes durch eine (auf R^+ erweiterte) Funktion.
(zur Kontrolle: $f(x) = 500 \cdot 0,7^x - 666\tfrac{2}{3} \cdot 0,1^x + 166\tfrac{2}{3}$*)*
Skizzieren Sie den Graphen dieser Funktion und berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem der Krankenstand am stärksten abnimmt.

d4) Untersuchen Sie die langfristige Entwicklung des Krankenstandes.

	I	II	III

a)

$$\begin{array}{ccc} & & \text{von} \\ & & \begin{array}{cccc} K & G & WG & V \end{array} \\ \text{nach} & \begin{array}{c} K \\ G \\ WG \\ V \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0{,}7 & 0 & 0 \\ 0{,}72 & 0 & 0{,}9 & 0 \\ 0{,}08 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A \end{array}$$

I	II	III
3		

c) b1) Die Übergangsmatrix für einen Fünf-Wochen-Zeitraum lautet:

$$A^5 \overset{TR}{=} \begin{pmatrix} 0{,}0987 & 0{,}1603 & 0{,}1084 & 0 \\ 0 & 0{,}1681 & 0 & 0 \\ 0{,}7803 & 0{,}5933 & 0{,}8573 & 0 \\ 0{,}1211 & 0{,}0783 & 0{,}0344 & 1 \end{pmatrix}$$

I	II	III
3		

Die Werte werden der Matrix A^5 entnommen:

b2) 16,81%

b3) 7,83%

I	II	III
	2	

c) Startvektor $\vec{v_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1500 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $A^3 \cdot \vec{v_0} = \begin{pmatrix} 333{,}9 \\ 514{,}5 \\ 583{,}2 \\ 68{,}4 \end{pmatrix}$

I	II	III
2	1	

c1) Situation nach drei Wochen:
Kranke: ca. 334 Personen Gesunde: ca. 515 Personen
wieder gesund: ca. 583 Personen verstorben: ca. 68 Personen

I	II	III
1		

c2) langfristige Entwicklung (durch TR-Überprüfung):
Auf Dauer gesehen wird die Population aussterben.

I	II	III
		2

d) d1) verkürzte Übergangsmatrix:

$$B = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}7 & 0 \\ 0{,}8 & 0 & 0{,}9 \end{pmatrix};$$

I	II	III
2		

d2) Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren:

$$B - k \cdot E_3 = \begin{pmatrix} 0{,}2-k & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}7-k & 0 \\ 0{,}8 & 0 & 0{,}9-k \end{pmatrix}$$

I	II	III
	2	

Damit ergibt sich folgende charakteristisch Gleichung:

$$0 = |B - k \cdot E_3| = (0{,}2-k)(0{,}7-k)(0{,}9-k) - 0{,}1 \cdot (0{,}7-k) \cdot 0{,}8 = -k^3 + 1{,}8k^2 - 0{,}87k + 0{,}07$$

$$= (0{,}7 - k) \cdot (k^2 - 1{,}1k + 0{,}1) = (0{,}7-k)(k-1)(k-0{,}1)$$

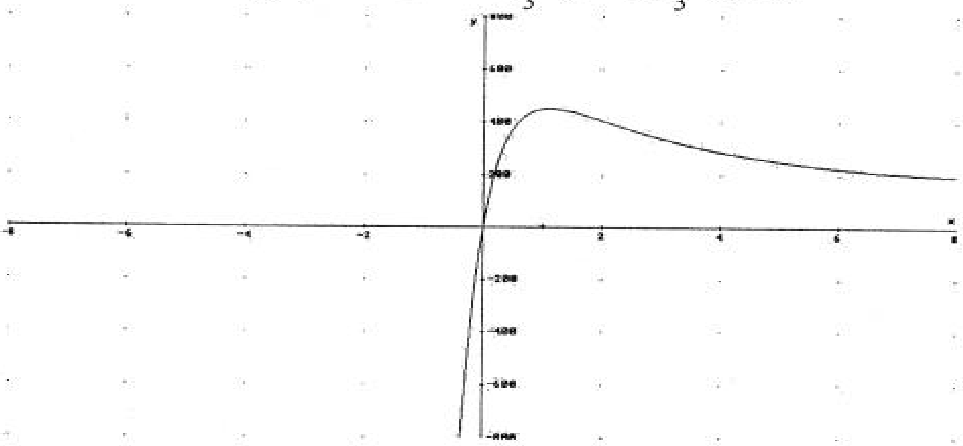
Als Eigenwerte ergeben sich somit: $k_1 = 0{,}7$; $k_2 = 1$; $k_3 = 0{,}1$.

I	II	III
3	3	

Für die zugehörigen Eigenvektoren ergibt die Rechnung:

Zu k_1: $\left| \begin{array}{r} 0{,}2x + 0{,}3y + 0{,}1z = 0{,}7x \\ 0{,}7y = 0{,}7y \\ 0{,}8x + 0{,}9z = 0{,}7z \end{array} \right| \Rightarrow \begin{array}{l} x = -\frac{1}{4}z \\ y = -\frac{3}{4}z \end{array} \Rightarrow \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

I	II	III
2	1	

Zu k_2: Das entsprechende GLS führt zu $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$	2	1	
Zu k_3: Das entsprechende GLS führt zu $\vec{w}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	2	1	
d3) Darstellung des Startvektors $\vec{v_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1500 \\ 0 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der Eigenvektoren: $r \cdot \vec{w}_1 + s \cdot \vec{w}_2 + t \cdot \vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1500 \\ 0 \end{pmatrix}$			
Mit dem TR ergibt sich: $r = 500 \quad s = 166\frac{2}{3} \quad t = 666\frac{2}{3}$		2	
Damit erhält man: $\vec{v}_n = A^n \cdot \vec{v}_0 = 500 \cdot k_1^{\,n} \cdot \vec{w}_1 + 166\frac{2}{3} k_2^{\,n} \cdot \vec{w}_2 + 666\frac{2}{3} \cdot k_3^{\,n} \cdot \vec{w}_3$	2	1	
Die erste Komponente von $\vec{v}_n$ liefert den Krankenbestand nach n Wochen: $500 \cdot 0{,}7^n + 166\frac{2}{3} - 666\frac{2}{3} \cdot 0{,}1^n$		2	
Die auf $\mathbb{R}_0^+$ erweiterte Funktion lautet somit: $f(x) = 500 \cdot 0{,}7^x - 666\frac{2}{3} \cdot 0{,}1^x + 166\frac{2}{3} \quad ; x \geq 0.$	1		
	2		
Zu bestimmen ist die Wendestelle von f:			2
$f''(x) = 500 \cdot (\ln(0{,}7)^2) 0{,}7^x - 666\frac{2}{3} \cdot (\ln(0{,}1)^2) 0{,}1^x \quad ; \quad f''(x) = 0 \overset{TR}{\Rightarrow} x \approx 2{,}065$	1	2	
$f''(2{,}065) \overset{TR}{>} 0$. Der Krankenstand nimmt nach zwei Wochen am stärksten ab.		2	
d4) Da $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 166\frac{2}{3}$ ist, nähert sich der Krankenstand diesem Wert.		2	
ΣA4	26	22	4
%	50	42	8