

Aufg.-Nr.: 22	Bereich: Übergangsmatrizen	Kursart: LK	WTR
---------------	----------------------------	-------------	-----

## Ödnis im Osten

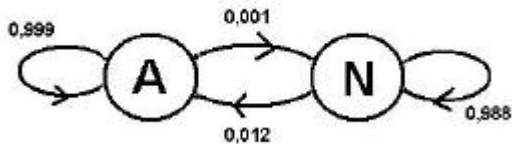
**Bis zu 50 Prozent seiner heutigen Bevölkerung wird Deutschlands Osten langfristig einbüßen. Diese Prognose wagen Forscher des Leibniz-Instituts für Länderkunde in Leipzig. Nun fordern sie Mut zum gekonnten Schrumpfen. (Stern, November 2004)**

Zu Beginn des Jahres 2004 lebten 69,5 Mio Menschen in den westdeutschen Bundesländern (einschließlich Berlin). In den fünf neuen Bundesländern lebten 13,5 Mio Menschen. Im Laufe des Jahres siedelten 1,2% der Bevölkerung aus den neuen in die alten Bundesländer um. In die umgekehrte Richtung waren es hingegen nur 0,1%.

- a) Gib einen Übergangsgraphen (Gozintho-Graphen) und eine Übergangsmatrix an, die den obigen „Austauschprozess“ zwischen den alten Bundesländern (A) und den neuen Bundesländern (N) beschreiben.
- b) Es soll nun im Weiteren versucht werden, mit Hilfe der Übergangsmatrix aus Aufgabenteil a) Prognosen über die nähere oder fernere Entwicklung der Bevölkerungsverteilung in Deutschland zu erstellen. Nenne Schwachpunkte dieses Prognosemodells und gib an, welche Annahmen man für alle folgenden Überlegungen zu Grunde legen müsste.
- c) Berechne die prognostizierten Bevölkerungszahlen in A und N für die Jahre 2005 und 2006.
- d) Berechne für die Übergangsmatrix  $M$  die Potenzen  $M^2$  und  $M^3$ . Interpretiere die Koeffizienten von  $M^2$  im Problemkontext und nutze dein Ergebnis zur Kontrolle von Aufgabenteil c).
- e) Ermittle in deinem groben Prognosemodell eine stabile Grenzverteilung der Einwohnerzahlen und vergleiche dein Ergebnis mit der einleitenden Stern-Meldung.
- f) Berechne einen Wert für die Abwanderungsquote aus den neuen Bundesländern, der erreicht werden müsste, damit bei gleichbleibender Zuwanderungsquote aus den alten Bundesländern langfristig eine Bevölkerungszahl von 10 Mio nicht unterschritten wird.

## Lösung

a)



Die zugehörige Übergangsmatrix lautet  $A = \begin{pmatrix} 0,999 & 0,012 \\ 0,001 & 0,988 \end{pmatrix}$

b) Zur weiteren Lösung der Aufgabe wird vorausgesetzt, dass die Bedingungen so bleiben wie im Text beschrieben, das Wanderungsverhalten könnte sich ändern, Geburten bleiben in diesem Modell unberücksichtigt.

c)  $\begin{pmatrix} 0,999 & 0,012 \\ 0,001 & 0,988 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 69,5 \\ 13,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 69,5925 \\ 13,4075 \end{pmatrix}$  für 2005

$\begin{pmatrix} 0,999 & 0,012 \\ 0,001 & 0,988 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 69,5925 \\ 13,4075 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 69,68 \\ 13,32 \end{pmatrix}$  gerundet für 2006

d)  $A^2 = \begin{pmatrix} 0,999 & 0,012 \\ 0,001 & 0,988 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,999 & 0,012 \\ 0,001 & 0,988 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,998 & 0,024 \\ 0,002 & 0,976 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 0,998 & 0,024 \\ 0,002 & 0,976 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,999 & 0,012 \\ 0,001 & 0,988 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,997 & 0,036 \\ 0,003 & 0,964 \end{pmatrix}$

$A^2 \cdot \begin{pmatrix} 69,5 \\ 13,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,998 & 0,024 \\ 0,002 & 0,976 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 69,5 \\ 13,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 69,685 \\ 13,315 \end{pmatrix}$

2,4% der Bevölkerung sind aus den neuen Bundesländern in die alten Länder ausgewandert, umgekehrt gingen 0,2% vom Westen in den Osten.

e)  $\begin{pmatrix} 0,999 & 0,012 \\ 0,001 & 0,988 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,999x + 0,012y = x \\ 0,001x + 0,988y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -0,001x + 0,012y = 0 \\ 0,001x - 0,012y = 0 \end{cases}$

Außerdem gilt noch  $x + y = 69,5 + 13,5 = 83$

Aus diesen Gleichungen folgt die Lösung:  $y = 76,62$  und  $x = 6,38$

Langfristig werden sich in den neuen Bundesländern 6,38 Mio. Einwohner sein, 76,62 Mio. befinden sich in den westlichen Bundesländern. Im Osten wird die Bevölkerung also mehr als vom Stern prognostizierten 50% abnehmen.

f)  $\begin{pmatrix} 0,999 & x \\ 0,001 & 1-x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 73 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 73 \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow 0,999 \cdot 73 + 10x = 73 \Leftrightarrow x = 0,0073$

Die Abwanderungsrate müsste bei 0,73% liegen.