Aufg.-Nr.: 23	Bereich: Übergangsmatrizen	Kursart: LK	WTR

Bevölkerungsentwicklung

Eine Stadt hatte im Jahr 1990 die Einwohnerzahl von 100.000 Bürgern, welche in den folgenden Jahren stagnierte.
Im Jahr 1990 lebten 80.000 Einwohner in der City (C) und 20.000 in den Vororten (V). Für 1995 und 2000 sind folgende Daten bekannt:

Jahr	Einwohner in der City (C)	Einwohner in den Vororten (V)
1995	76.000	24.000
2000	73.200	26.800

Die Erhebungen wurden immer zu Jahresbeginn durchgeführt.

1. Bestimmen Sie die stochastische Übergangsmatrix A für die Bevölkerungsentwicklung innerhalb der Stadt. Dabei beträgt der Zeitraum für einen Übergang wie im Eingangstext fünf Jahre. Gehen Sie von gleich bleibenden prozentualen Umzugstrends aus.
   Zeichnen Sie ein Diagramm, das die Bevölkerungsbewegungen veranschaulicht und berechnen Sie mit Hilfe von A die City-Vorort-Verteilung für den Beginn der Jahre 2005 und 2010.
   Bestimmen Sie ebenfalls die Verteilung für den Beginn von 1985.
   Zur Kontrolle: $A = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix}$.

2. Bestimmen Sie die stationäre Verteilung der Einwohner in der City und den Vororten.

3. Sei nun $A = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}$ mit $0 < p < 1$ und $0 < q < 1$ eine beliebige stochastische Matrix. Ermitteln Sie für A denjenigen Fixvektor, dessen Koordinaten die Summe 1 haben.

4. Weisen Sie für die Matrix A aus Teilaufgabe 3 nach: Der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und das Produkt von $A \cdot \vec{v}$ sind Vielfache voneinander.

1.) Es gilt $A \cdot \begin{pmatrix} 80000 \\ 20000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 76000 \\ 24000 \end{pmatrix}$ und $A \cdot \begin{pmatrix} 76000 \\ 24000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 73200 \\ 26800 \end{pmatrix}$.

Mit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ergeben sich die Gleichungen

I $\quad 80000a + 20000b = 76000 \Rightarrow b = 3{,}8 - 4a$

II $\quad 80000c + 20000d = 24000 \Rightarrow d = 1{,}2 - 4c$

III $\quad 76000a + 24000b = 73200$

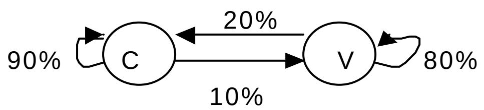
IV $\quad 76000c + 24000d = 26800$

b eingesetzt in III ergibt $a = 0{,}9$; d eingesetzt in IV ergibt $c = 0{,}1$

$\Rightarrow b = 0{,}2 \quad d = 0{,}8$

Also $A = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix}$.

Diagramm:



Verteilung für 2005: $A \cdot \begin{pmatrix} 73200 \\ 26800 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 71240 \\ 28760 \end{pmatrix}$, d.h. 71240 leben in der City, 28760 in den Vororten.

Verteilung für 2010: $A \cdot \begin{pmatrix} 71240 \\ 28760 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 69868 \\ 30132 \end{pmatrix}$, d.h. 69868 leben in der City, 30132 in den Vororten.

Für den Verteilungsvektor $\vec{x}$ von 1985 gilt $A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 80000 \\ 20000 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{x} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 80000 \\ 20000 \end{pmatrix}$.

Bestimme A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0{,}9 & 0{,}2 & 1 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}8 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 0{,}9 & 0{,}2 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}7 & -0{,}1 & 0{,}9 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cc|cc} -0{,}63 & 0 & -0{,}72 & 0{,}18 \\ 0 & 0{,}7 & -0{,}1 & 0{,}9 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{8}{7} & -\frac{2}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{9}{7} \end{array}\right)$$

Damit ist $A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 80000 \\ 20000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 85714\frac{2}{7} \\ 14285\frac{5}{7} \end{pmatrix}$. 1985 lebten ca. 85714 Leute in der City, 14286 in den Vororten.

2.) Für die stationäre Verteilung gilt: $A \cdot \vec{x} = \vec{x}$, also $\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{x}$.

$$\begin{aligned} -0{,}1x + 0{,}2y &= 0 \\ 0{,}1x - 0{,}2y &= 0 \end{aligned}$$

Damit x=2y und $\vec{x} = r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Da außerdem x+y=1, folgt $2r + r = 1 \Leftrightarrow r = \frac{1}{3}$ und damit ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ die stationäre Verteilung.
Bezogen auf 100000 Einwohner heißt das: ca. 66667 Bewohner in der City und 33333 in den Vororten.
Für die stochastische Grenzmatrix G gilt:
$G = \lim\limits_{n \to \infty} \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ denn diese stimmt in den Spalten überein, jede Spalte stellt die stationäre Verteilung dar, G multipliziert mit einem Verteilungsvektor verändert diesen nicht.
Langfristig ist mit $\frac{2}{3}$ City- und $\frac{1}{3}$ Vorortbewohner zu rechnen.
3.) $k \in IR$ ist Eigenwert der Matrix A, wenn gilt $A \cdot \vec{x} = k \cdot \vec{x}$.

$$\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = k \cdot \vec{x} \Leftrightarrow (0{,}9 - k)x + 0{,}2y = 0 \wedge 0{,}1x + (0{,}8 - k)y = 0$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0{,}9 - k & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}8 - k & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cc|c} 0{,}9 - k & 0{,}2 & 0 \\ 0 & k^2 - 1{,}7k + 0{,}7 & 0 \end{array}\right)$$

Das homogene LGS hat außer der trivialen Lösung eine Lösung, wenn gilt
$k^2 - 1{,}7k + 0{,}7 = 0 \Leftrightarrow k = 0{,}85 \pm \sqrt{0{,}0225} \Leftrightarrow k = 1 \vee k = 0{,}7$
k=1 bzw. k=0,7 sind die Eigenwerte der Matrix A.

Eigenvektor zum Eigenwert k_1=1: $(0{,}9 - 1) \cdot x + 0{,}2y = 0 \Leftrightarrow x = 2y \Rightarrow \vec{x} = r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Eigenvektor zum Eigenwert k_2=0,7: $0{,}2x + 0{,}2y = 0 \Leftrightarrow x = -y \Rightarrow \vec{x} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

4.) Z.Z. ist: Die stationäre Verteilung der Matrix A ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{q}{p+q} \\ \frac{p}{p+q} \end{pmatrix}$.

$$A \cdot \vec{x} = \vec{x}$$

$$\begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{x}$$

$$(1-p)x + qy = x \wedge px + (1-q)y = y$$

$-px + qy = 0 \wedge px - qy = 0 \Rightarrow x = \frac{q}{p}y$, da x+y=1 gilt

$\frac{q}{p}y + y = 1 \Leftrightarrow y = \frac{p}{q+p}$. Damit: $x = \frac{q}{q+p}$.

$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{q}{q+p} \\ \frac{p}{q+p} \end{pmatrix}$ Da die stationäre Verteilung die Spalten der Grenzmatrix angibt, hat G die gegebene Form.

5.) Z.Z. ist für alle $p, q \in IR$ gilt (a) $A \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1-p-q)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und (b) $A \cdot \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$.

(a) $\begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+p+q \\ -p+1-q \end{pmatrix} = (1-p-q)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q-pq+pq \\ pq+p-pq \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$.

Damit ist die Behauptung gezeigt.