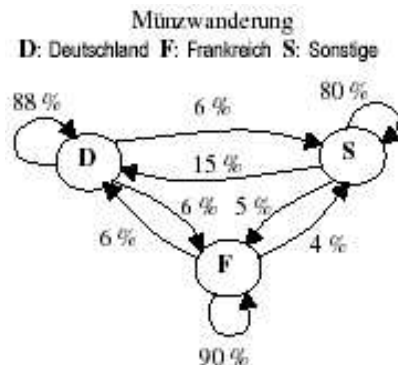


Münzwanderung

Zum 1. 1. 2002 wurden in allen beteiligten EU-Ländern Euro-Münzen in Umlauf gebracht.

In jedem Land wurden ausschließlich Münzen eigener Prägung eingesetzt. Für die dann einsetzende „Münzenwanderung pro Jahr“ zwischen den Gebieten **D**eutschland, **F**rankreich und **S**onstige Länder sollten sich die jährlichen Wanderungsanteile gemäß untenstehendem Übergangsgraphen verhalten.



- Erstellen Sie für diesen Vorgang die Übergangsmatrix A , und beschreiben Sie die Übergänge in Worten.
- Ermitteln Sie unter den genannten Hypothesen die prozentuale Verteilung der „deutschen“ Münzen auf die drei Gebiete (D, F, S) zum 1. 1. 2003, zum 1.1.2004 und zum 1.1.2006, und geben Sie die Übergangsmatrix für 2 Jahre an.

Ihre Startverteilung beschreibt der Vektor \vec{D}_{02} mit $\vec{D}_{02} = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Zum 1.1.02 befinden sich also 100% der deutschen Münzen in Deutschland.

- Untersuchen Sie, ob es eine stationäre Verteilung der Münzen auf die drei Gebiete gibt, und geben Sie diese ggfs. an.
- Zum 1.1.2002 wurden in Deutschland 800 Mio, in Frankreich 600 Mio und in den sonstigen Ländern 150 Mio Münzen ausgegeben. Ermitteln Sie die Gesamtanzahl aller Münzen jeweils in den drei Gebieten zum 1.1.2003, und erklären Sie, inwieweit man bei dieser Problemstellung die Matrixmultiplikation einsetzen kann.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass am 1.1.2004
 - eine deutsche Euromünze Deutschland nie verlassen hat.
 - eine im Ausland gewesene „deutsche“ Münze wieder in Deutschland ist.
 - eine von Ihnen in Deutschland gefundene „deutsche“ Münze in Frankreich war.

a) Übergangsmatrix Von den in Deutschland umlaufenden Münzen bleiben 88 % in

3
/
3

$$A = \begin{pmatrix} 0,88 & 0,06 & 0,15 \\ 0,06 & 0,9 & 0,05 \\ 0,06 & 0,04 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{Deutschland (D), 6 \% gehen nach Frankreich (F), 6 \% gehen} \\ \text{in sonstige Länder (S). Von den in Frankreich umlaufenden} \\ \text{Münzen gehen 6 \% nach D, bleiben 90 \% in F und gehen 4} \\ \text{\% nach S.} \end{array}$$

Von den in sonstigen Ländern umlaufenden Münzen gehen 15 % nach D, 5 % nach F und bleiben 80 % in S.

b)

$$D_{03} = A \cdot D_{02} = \begin{pmatrix} 0,88 & 0,06 & 0,15 \\ 0,06 & 0,9 & 0,05 \\ 0,06 & 0,04 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 88 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{Man erhält wie erwartet, dass nach} \\ \text{einem Jahr 88 \% der deutschen} \\ \text{Münzen in D, 6 \% in F und 6 \% in} \\ \text{S befinden.} \end{array}$$

$$D_{04} = A \cdot D_{03} = \begin{pmatrix} 0,88 & 0,06 & 0,15 \\ 0,06 & 0,9 & 0,05 \\ 0,06 & 0,04 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 88 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 78,7 \\ 10,98 \\ 10,32 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{Nach zwei Jahren befinden sich} \\ \text{78,7 \% der deutschen Münzen} \\ \text{in D, 10,98 \% in F und 10,32 \%} \\ \text{in S} \end{array}$$

6
/
6

Die 2 - jährige Übergangsmatrix ist $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0,787 & 0,1128 & 0,255 \\ 0,1098 & 0,8156 & 0,094 \\ 0,1032 & 0,0716 & 0,651 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$D_{06} = A^2 \cdot D_{04} \approx \begin{pmatrix} 65,807 \\ 18,567 \\ 15,626 \end{pmatrix}$$

Zum 1.1.06 sind 65,8 % der deutschen Münzen in D, 18,6 % in F und 15,6 % in S

c) D stationäre Verteilung $\Rightarrow A \cdot D = D$, dies führt zu dem homogenen LGS:

6
/
6

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -0,12 & 0,06 & 0,15 & 0 \\ 0,06 & -0,1 & 0,05 & 0 \\ 0,06 & 0,04 & -0,2 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -6 & 3 & 7,5 & 0 \\ 6 & -10 & 5 & 0 \\ 6 & 4 & -20 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -6 & 3 & 7,5 & 0 \\ 0 & -7 & 12,5 & 0 \\ 0 & 7 & -12,5 & 0 \end{array} \right)$$

$$-14d_2 + 25d_3 = 0 \Rightarrow d_3 = \frac{14}{25} \cdot d_2 \quad \text{Sei } d_2 = 25t \Rightarrow$$

$$d_3 = 14t \Rightarrow 6d_1 = 3 \cdot 25t + 7,5 \cdot 14t = 180t \Rightarrow$$

$$d_1 = 30t \Rightarrow L = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 25 \\ 14 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow \text{Mit } d_1 + d_2 + d_3 = 100$$

ist $t = \frac{100}{69}$ und $D = 100 \cdot \begin{pmatrix} 10/23 \\ 25/69 \\ 14/69 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 43,48 \\ 36,23 \\ 20,29 \end{pmatrix}$ eine stationäre Verteilung, wobei

43,48 % der deutschen Münzen in D, 36,23 % in F und 20,29 % in S-Ländern sind.

d) Die Anzahl der Münzen in Deutschland errechnet sich entweder aus $0,88 \cdot 800 + 0,06 \cdot 600 + 0,15 \cdot 150 = 762,50$ [Mio] und analog folgt, dass 595,5 Mio Münzen in Frankreich und 192 Mio. in den sonstigen Ländern am 1.1.2004 sind oder

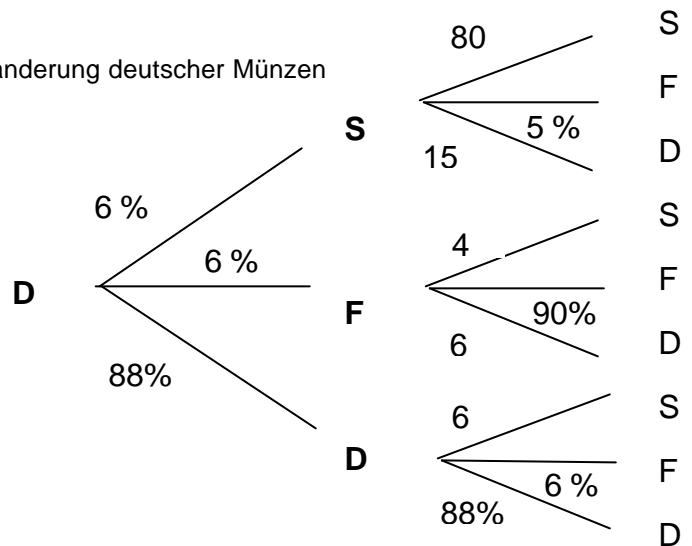
mit Hilfe der Übergangsmatrix A zu $\begin{pmatrix} 762,5 \\ 595,5 \\ 192 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} 800 \\ 600 \\ 150 \end{pmatrix}$.

e) I $p(DD) = 0,7744 = 77,44\%$

II $p(FD;SD) = 0,0126 = 1,26\%$ Wanderung deutscher Münzen

III Satz von Bayes;

$$p_D(F) = p(FD) / p(DD;FD;SD) = 0,00457.. \approx 0,46\%$$



4
/
4

6
/
6