

Name:

Datum:

## Übergangsprozesse - Blütenfarben - Aufgabe mit Lösung

Eine bestimmte Pflanzenart besitze die drei möglichen Blütenfarben rot (R), pink (P) und weiß (W). Bei der Kreuzung dieser Pflanzen mit einer pinkblühenden Blume entsteht in Abhängigkeit von den Blütenfarben der beiden beteiligten "Elternpflanzen" folgende Farbanteile für die "Kinder":



Eltern "rot" mit "pink" ergibt	50% rot	50% pink	0% weiß
Eltern "pink" mit "pink" ergibt	25% rot	50% pink	25% weiß
Eltern "weiß" mit "pink" ergibt	0% rot	50% pink	50% weiß

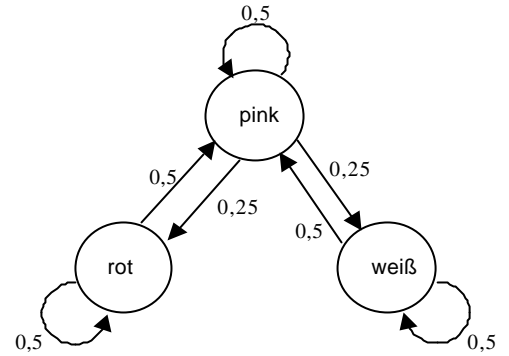
In einem Feldversuch werden 4000 rotblühende, 4000 pinkblühende und 4000 weißblühende Pflanzen stets mit pinkblühenden Pflanzen gekreuzt und von jeder dieser 12000 Pflanzen im darauffolgenden Jahr je ein Samenkorn ausgesät. Mit den daraus entstehenden 12000 Blumen wird nun wieder durch Kreuzung mit pinkblühenden Pflanzen jeweils ein Samenkorn gewonnen, welches ein Jahr später erneut ausgesät wird usw.

### Arbeitsaufträge:

- Veranschaulichen Sie die Übergänge der Blütenfarben von einer Generation zur nächsten durch eine geeignete graphische Darstellung.*
- Stellen Sie eine Übergangsmatrix von einer Generation auf die nächste für die Kreuzung der drei Blütenfarben mit jeweils pinkblühenden Pflanzen auf.*
- Bestimmen Sie die Farbverteilung der 12000 Pflanzen nach einem Jahr.*
- Bestimmen Sie die Farbverteilung nach zwei Jahren. Was lässt sich hieraus über die langfristige Farbverteilung aussagen, wenn dieses Kreuzungsverfahren fortgeführt wird?*
- Bestimmen Sie die Farbverteilung für die ersten drei Nachfolgenerationen, wenn man diesen Versuch beginnend mit 6000 weißblühenden und 6000 pinkblühenden Pflanzen, jedoch keiner rotblühenden durchführt.*

**Lösung:**

- a) Die Farbübergänge stellen eine MARKOV-Kette dar und können z.B. durch folgenden Graphen veranschaulicht werden:



- b)

Die Übergangsmatrix ist:  $M =$

		Eltern		
		R	P	W
Kind	R	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
	P			
	W			

- c)

Die Farbverteilung zu Beginn ist  $G_0 = \begin{pmatrix} 4000 \\ 4000 \\ 4000 \end{pmatrix}$ . Damit ergibt sich als Verteilung nach einem Jahr:

$$G_1 = M \cdot G_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4000 \\ 4000 \\ 4000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3000 \\ 6000 \\ 3000 \end{pmatrix}$$

- d)

Nach einem weiteren Jahr ergibt sich analog:  $G_2 = M \cdot G_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3000 \\ 6000 \\ 3000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3000 \\ 6000 \\ 3000 \end{pmatrix}$ .

Dies bedeutet, dass die Farbverteilung von 1:2:1 bei dieser Vorgehensweise bereits nach der ersten Kreuzung stabil geworden ist.

e)

Die Übergangsmatrix ist wieder  $M$ , und für die Anfangsverteilung verwendet man jetzt  $H_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6000 \\ 6000 \end{pmatrix}$ .

Hierauf die Matrix  $M$  angewandt erhält man:  $H_1 = M \cdot H_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6000 \\ 6000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1500 \\ 6000 \\ 4500 \end{pmatrix}$  und hier-

aus:  $H_2 = M \cdot H_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1500 \\ 6000 \\ 4500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2250 \\ 6000 \\ 3750 \end{pmatrix}$  und  $H_3 = M \cdot H_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2250 \\ 6000 \\ 3750 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2625 \\ 6000 \\ 3375 \end{pmatrix}$ .

Auch hier lässt sich vermuten, dass die Verteilung 1:2:1 langfristig erreicht werden wird.