Aufgabe 1 Vegetation

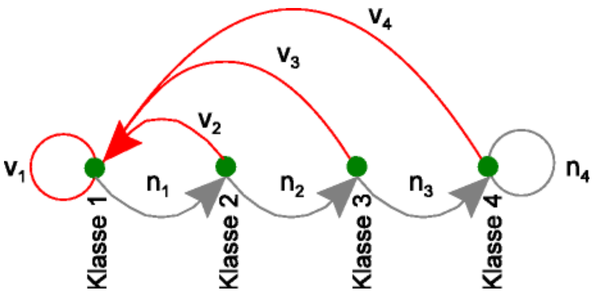
In der Übergangszone zwischen Wüstenklima und gemäßigtem Klima an der Westküste Nordamerikas trifft man auf einer Fläche von ca. 2000 km² eine Vegetation immergrüner Sträucher an. Man bezeichnet das als „Chaparral".

Die Brennbarkeit dieser Pflanzen hängt sehr von ihrem Alter ab. Besonders leicht brennen die älteren Pflanzen wegen der großen Mengen verdorrten Materials. Brände haben abgesehen von ihrer Gefahr für Mensch und Tier auch eine sehr nützliche Funktion: anstelle der verbrannten Sträucher wachsen ziemlich schnell junge, kräftige Pflanzen aus dem Boden. Spontane Brände werden daher nicht immer gelöscht. Die Verjüngung sorgt immer wieder dafür, dass die Gebiete mit dürrem Material nicht zu groß werden.

Diese Situation lässt sich z.B. in folgendem Modell darstellen:

- Die Vegetation wird entsprechend ihrem Alter in vier Klassen eingeteilt:
  Klasse 1: 0 - 10 Jahre
  Klasse 2: 10 - 20 Jahre
  Klasse 3: 20 - 30 Jahre
  Klasse 4: 30 Jahre und älter.
- Als Maß für den Umfang einer Klasse nimmt man nicht die Anzahl der Pflanzen, sondern die Fläche des durch diese Klasse bedeckten Gebietes.
- Bei jeder Klasse bleibt der prozentuale Anteil, der in 10 Jahren verbrennt, konstant.
- Die Gesamtfläche des Gebietes beträgt stets 2000 km².

Die Entwicklung der Vegetation in diesem Modell beschreibt der folgende Graph:



Bezeichnungen:
v_i = Anteil von Klasse i, der verbrennt ($v_i < 1$)
n_i = Anteil von Klasse i, der nicht verbrennt ($n_i < 1$)

a) Geben Sie unter Verwendung der Zahlenwerte in der Tabelle und gemäß dem Graphen bzw. dem oben stehenden Modell eine Populationsmatrix (Leslie-Matrix) L an und begründen Sie Ihr Vorgehen.

Verbrennende Anteile	$v_1 = 0{,}01$	$v_2 = 0{,}02$	$v_3 = 0{,}50$	$v_4 = 0{,}20$
Nicht verbrennende Anteile	$n_1 = 0{,}99$	$n_2 = 0{,}98$	$n_3 = 0{,}50$	$n_4 = 0{,}80$

b) Begründen Sie, warum für alle vier Klassen $n_i + v_i = 1$ gelten muss.

c) Zu Beginn der Modellierung nehmen die Klassen die folgenden Flächen (in km^2) ein:

Klasse 1: 302 Klasse 2: 284 Klasse 3: 314 Klasse 4: 1100

Berechnen Sie daraus mit Hilfe der Leslie-Matrix L eine Prognose für die Flächenmaße der einzelnen Klassen nach 10 Jahren (1 Zeittakt).

d) Berechnet man von der Matrix L aus Aufgabenteil a) die Potenzen L^2, L^3, L^4, … usw., so stellt man fest, dass sich die Matrizen L^n für größere Werte von n kaum noch voneinander unter scheiden. So stimmen die gerundeten Matrizen L für $n \geq 30$ mit der folgenden Matrix überein:

$$\begin{pmatrix} 0{,}185 & 0{,}185 & 0{,}185 & 0{,}185 \\ 0{,}185 & 0{,}185 & 0{,}185 & 0{,}185 \\ 0{,}18 & 0{,}18 & 0{,}18 & 0{,}18 \\ 0{,}45 & 0{,}45 & 0{,}45 & 0{,}45 \end{pmatrix}$$

Was kann man daraus für die Chaparral-Vegetation folgern?

e) Die Berechnung in Aufgabenteil c) (und auch in d)) kann als Funktion aufgefasst werden. Beschreiben Sie diese Funktion (Zuordnungsvorschrift, Definitions- und Zielmenge), und geben Sie als Beispiel mit Ihrer Funktion die Rechenvorschrift für *Prognose in 50 Jahren* an.

f) In der Praxis führen die Verwalter des Chaparral auch noch ein kontrolliertes, gewolltes Abbrennen von Teilen der Vegetation, die älter als 10 Jahre ist, durch.

Dabei soll im Modell das Abbrennen immer unmittelbar nach Ablauf von 10 Jahren (also am Ende eines Zeittaktes) auf einmal stattfinden, wobei jeweils 2% von Klasse 2, 2% von Klasse 3 und 7% von Klasse 4 abbrennen.

Bestimmen Sie als Modell zur Berechnung der Folgen für die Vegetation eine entsprechende Matrix M.

Beschreiben Sie den gesamten zehnjährigen Vorgang des spontanen und gewollten Abbrennens mit Hilfe der Matrizen M und L und begründen Sie Ihr Vorgehen.

Aufgabe 1 Vegetation

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>$$L=\begin{pmatrix}0{,}01 & 0{,}02 & 0{,}5 & 0{,}2\\ 0{,}99 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0{,}98 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}8\end{pmatrix}$$
v_i beschreibt den Anteil der Fläche, die Pflanzen aus Klasse i bedecken, der verbrennt und daher das Wachstum junger Pflanzen begünstigt, also nach 10 Jahren zur Klasse 1 gerechnet wird. Daher stehen diese Zahlen in der 1. Zeile der Matrix, aus der ja die Fläche zu Klasse 1 nach 10 Jahren berechnet wird.
n_i beschreibt den Anteil der Fläche, die Pflanzen aus Klasse i bedecken, der nicht verbrennt und daher nach 10 Jahren zur Klasse i + 1 gehört (i < 4) bzw. in Klasse 4 verbleibt. Daher stehen n_i für i = 1, 2 und 3 in Zeile i + 1, mit der die Fläche von Klasse i + 1 berechnet wird. In Zeile 4 kommt noch n_4 hinzu, da dieser Anteil von Pflanzen in Klasse 4 verbleibt.</td><td>10</td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Jede Klasse wird unterteilt in zwei Anteile: der verbrennende Anteil und der nicht verbrennende Anteil. Beide machen 100 % aus, also 1.</td><td></td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Sei $X_0 = (302 \mid 284 \mid 314 \mid 1100)^T$.
Dann ist die Population nach 10 Jahren $X_1 = L \cdot X_0$.
$$X_1=\begin{pmatrix}0{,}01 & 0{,}02 & 0{,}5 & 0{,}2\\ 0{,}99 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0{,}98 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}302\\284\\314\\1100\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}386\\299\\278\\1037\end{pmatrix}$$</td><td>15</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Langfristig streben in diesem Modell die Flächengrößen jeweils gegen feste Werte:
Die Gesamtfläche bleibt nach Vorgaben der Aufgabe unverändert 2000 km², und da die Zeilen der Matrix jeweils gleiche Elemente enthalten, ergeben sich jeweils immer dieselben Anteile an der Gesamtfläche:
Anteile der Klassen 1 und 2: $0{,}185 \cdot 2000\ \text{km}^2 = 370\ \text{km}^2$.
Anteil der Klasse 3: $0{,}18 \cdot 2000\ \text{km}^2 = 360\ \text{km}^2$.
Anteil der Klasse 4: $0{,}45 \cdot 2000\ \text{km}^2 = 900\ \text{km}^2$.</td><td></td><td>10</td><td>10</td></tr>
<tr><td>e)</td><td>Es gibt verschiedene Möglichkeiten, z.B.
$X_{i+1} = f\left(X_i\right) = L \cdot X_i$ und D_f = Menge aller Vektoren mit 4 Komponenten = Zielmenge.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	$g(t) = L^t \cdot X_0$ (für konstante Anfangspopulation X_0 mit $D_f = \mathbb{N}$, Zielmenge wie oben. *Die 2. Darstellung eignet sich eher für Langzeitprognosen*: Population nach 50 Jahren: $g(5) = L^5 \cdot X_0$. 1. Darstellung: $X_5 = f(X_4) = f(f(X_3)) = f(f(f(X_2))) = f(f(f(f(X_0))))$ *oder ab hier verbalisiert.*			15
f)	$M = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}02 & 0{,}02 & 0{,}07 \\ 0 & 0{,}98 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}98 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}93 \end{pmatrix}$ Die Prozentanteile für das Abbrennen stehen in Zeile 1, m_{11} = 1, da Klasse 1 nicht abgebrannt wird, also unverändert bleibt. In den restlichen Zeilen steht der entsprechende Anteil, der nicht abgebrannt wird, in der Diagonalen, die zugehörige Klasse verkleinert sich entsprechend. $M \cdot (L \cdot X_i)$ beschreibt den kompletten Vorgang: $X_{i+1} = L \cdot X_i$ liefert die Flächenmaße durch spontane Brände, $X_{\text{neu}} = M \cdot X_{i+1}$ schließlich die sich durch gewolltes Abbrennen daraus ergebenden Flächen: $M \cdot (L \cdot X_i)$. *Die Reihenfolge ergibt sich aus dem Aufgabentext.*		25	
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25