Aufgabe 3 Käferpopulation

Grundlage der Aufgabe: E. LEHMANN, Lineare Algebra mit dem Computer, Stuttgart 1983, S. 186f

Die Entwicklung eines Käfers beschreibt das folgende Modell:

Aus den Eiern schlüpfen nach einem Monat Larven, nach einem weiteren Monat werden diese zu Käfern, die nach einem Monat Eier legen und dann sterben.

- Aber nur aus einem Viertel der Eier werden Larven, die anderen Eier werden von Tieren gefressen oder verenden.
- Von den Larven wird die Hälfte zu Käfern, die andere Hälfte stirbt.

Jeder Käfer legt 8 Eier.

a) Stellen Sie das beschriebene Modell mit einem Graphen dar und geben Sie die Populationsmatrix P an.

Berechnen Sie mit P, wie eine Population von 40 Eiern, 40 Larven und 40 Käfern nach einem Monat aussieht.

b) Die in a) angegebene Population soll über einen längeren Zeitraum beobachtet werden. Dazu benötigt man ein kleines Terrarium, wenn die Anzahl der Käfer im Laufe der Zeit nicht über 60 ansteigt, andernfalls ein großes.

Ermitteln Sie, welches Terrarium nach dem Populationsmodell gekauft werden muss.

c) Bestimmen Sie für das Populationsmodell einen Anfangsbestand, der nach einem Monat unverändert ist.

Beschreiben Sie die Langzeitentwicklung dieses Bestandes.

d) Bestimmen Sie für die Populationsmatrix P die Potenzen P^2 und P^3,

und zeigen Sie damit, dass $P^3 = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \textit{Einheitsmatrix}$ gilt.

Interpretieren Sie diesen Sachverhalt im Kontext der Population.

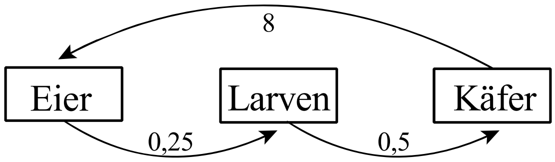
e) Diese Teilaufgabe ist eine Verallgemeinerung von d):

Gegeben sei die Matrix $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{Q}_0^+$ und $0 \le b, c \le 1$.

Ermitteln Sie Bedingungen für a, b und c, damit $M^3 = E = \textit{Einheitsmatrix}$.

Zeigen Sie, dass für diese Matrizen M dann $M^4 = M$ gilt, und beurteilen Sie das Ergebnis im Hinblick auf alle Potenzen der Matrix M.

Aufgabe 3 Käferpopulation

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	Graph:  Populationsmatrix $P=\begin{pmatrix}0&0&8\\0,25&0&0\\0&0,5&0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0&0&8\\0,25&0&0\\0&0,5&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}40\\40\\40\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}320\\10\\20\end{pmatrix}$ Die Population besteht also aus 320 Eiern, 10 Larven und 20 Käfern nach einem Monat.	20	5	
b)	$\begin{pmatrix}0&0&8\\0,25&0&0\\0&0,5&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}320\\10\\20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}160\\80\\5\end{pmatrix}$, nach 2 Monaten 160 Eier, 80 Larven, 5 Käfer; $\begin{pmatrix}0&0&8\\0,25&0&0\\0&0,5&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}160\\80\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}40\\40\\40\end{pmatrix}$, nach 3 Monaten ist wieder der Anfangsbestand erreicht. Die Anzahl der Käfer ist stets kleiner als 60, daher reicht das kleine Terrarium.		20	
c)	$\begin{pmatrix}0&0&8\\0,25&0&0\\0&0,5&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}8z\\0,25x\\0,5y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ Gleichung I in II eingesetzt ergibt $2z=y$. Damit sind x und y Vielfache von z und der Lösungsvektor lautet $(8 \mid 2 \mid 1)$. Damit bleibt z.B. die Anfangspopulation von 80 Eiern, 20 Larven und 10 Käfern unverändert. Andere Beispiele ergeben sich für andere Werte von z.		15	
d)	$P^2=\begin{pmatrix}0&0&8\\0,25&0&0\\0&0,5&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&8\\0,25&0&0\\0&0,5&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&4&0\\0&0&2\\0,125&0&0\end{pmatrix}$ $P^3=\begin{pmatrix}0&0&8\\0,25&0&0\\0&0,5&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&4&0\\0&0&2\\0,125&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Hier zeigt sich auf andere Weise das Ergebnis von b), nämlich dass nach drei Monaten die Anfangspopulation wieder erreicht ist, weil gilt: $P^3 \cdot X_0 = X_0 = P^2 \cdot (P \cdot X_0) = P^2 \cdot X_1 = P \cdot (P \cdot X_1) = P \cdot X_2 = X_3$. Dabei ist X_0 der Anfangsbestand, X_1 der Bestand nach 1 Monat, X_2 nach 2 und X_3 nach 3 Monaten.		10	10
e)	$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ac & 0 \\ 0 & 0 & ab \\ cb & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & ab \\ cb & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} abc & 0 & 0 \\ 0 & abc & 0 \\ 0 & 0 & abc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Die Bedingung lautet $a \cdot b \cdot c = 1$, was bei obiger Matrix P erfüllt ist. Da $M^3 = \textit{Einheitsmatrix } E$ folgt $M^4 = M^3 \cdot M = E \cdot M = M$. Die Potenzen dieser Matrizen der Form M können also nur drei verschiedene Werte annehmen, die zyklisch auftreten: $M = M^4 = M^7 = \ldots \quad M^2 = M^5 = M^8 = \ldots \quad M^3 = M^6 = M^9 = \ldots = E$		10	10
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20