

## Aufgabe 1 Vegetation

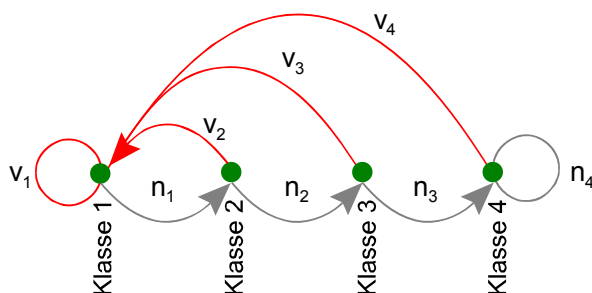
Quelle: Wiskunde A (1. Termin), Aufgabe 3, 1994, zum Teil veränderte Zahlenwerte

In der Übergangszone zwischen Wüstenklima und gemäßigtem Klima an der Westküste Nordamerikas trifft man auf einer Fläche von ca. 2000 km<sup>2</sup> eine Vegetation immergrüner Sträucher an. Man bezeichnet das als „Chaparral“. Die Brennbarkeit dieser Pflanzen ist sehr von ihrem Alter abhängig. Wegen der großen Mengen verdorrten Materials brennen vor allem die älteren Pflanzen sehr leicht. Brände haben abgesehen von ihrer Gefahr für Mensch und Tier auch eine sehr nützliche Funktion: anstelle der verbrannten Sträucher wachsen ziemlich schnell junge, kräftige Pflanzen aus dem Boden. Spontane Brände werden daher nicht immer gelöscht. Die Verjüngung sorgt immer wieder dafür, dass keine großen Gebiete mit dürrerem Material entstehen, die durch Brände bis hin zu einer Katastrophe Schaden nehmen könnten.

Diese Situation lässt sich in einem Modell darstellen, bei dem man von folgenden Annahmen ausgeht:

- Die Vegetation wird entsprechend ihrem Alter in vier Klassen eingeteilt:
  - Klasse 1: 0 – 10 Jahre
  - Klasse 2: 10 – 20 Jahre
  - Klasse 3: 20 – 30 Jahre
  - Klasse 4: 30 Jahre und älter
- Als Maß für den Umfang einer Klasse nimmt man nicht die Anzahl der Pflanzen, sondern die Fläche des durch diese Klasse bedeckten Gebietes.
- Bei jeder Klasse bleibt der prozentuale Anteil, der in jeweils 10 Jahren verbrennt, konstant.
- Die Gesamtfläche des Gebietes beträgt stets 2000 km<sup>2</sup>.

Für dieses Modell kann der folgende Graph gezeichnet werden:



Bezeichnungen:

$v_i$  = Anteil von Klasse  $i$ , der verbrennt  
( $v_i < 1$ )

$n_i$  = Anteil von Klasse  $i$ , der nicht verbrennt  
( $n_i < 1$ )

- a) Erläutern Sie, welche Bedeutung die  $v_i$  und  $n_i$  in diesem Graphen haben.

Stellen Sie gemäß dem Graphen bzw. dem oben beschriebenen Modell eine Populationsmatrix (Leslie-Matrix)  $M$  auf und begründen Sie Ihr Vorgehen.

- b) Aus nebenstehender Tabelle können Sie entnehmen, wie groß die Fläche in km<sup>2</sup> ist, die jede Klasse zum Zeitpunkt  $t = 0$  (jetzt) und  $t = 1$  (10 Jahre später) bedeckt.

Klasse	$t = 0$	$t = 1$
1	600	424
2	400	594
3	300	392
4	700	590

Berechnen Sie  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $n_1$  und  $n_2$ .

- c) Die Leslie-Matrix für die in b) genannten Zahlen lautet:  $M = \begin{pmatrix} 0,01 & 0,02 & 0,2 & 0,5 \\ 0,99 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,98 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 & 0,5 \end{pmatrix}$

Über die Gleichung  $M \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0,01 & 0,02 & 0,2 & 0,5 \\ 0,99 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,98 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 600 \\ 400 \\ 300 \\ 700 \end{pmatrix}$

werden in b) Flächengrößen der jeweiligen Klassen berechnet.

Diesen Vorgang kann man sich auch als Funktion mit mehreren Variablen vorstellen.

Beschreiben Sie diese Funktion  $f$ . Wie sieht das Urbild (*die Definitionsmenge*) aus, wie das Bild (*die Wertemenge*)?

- d) Von der Matrix  $M$  aus Aufgabenteil a) wurden mit dem Computer die Potenzen  $M^2$ ,  $M^3$ ,  $M^4$  ... usw. berechnet. Man stellt fest, dass die Matrizen  $M^n$  sich für größere Werte von  $n$  kaum noch voneinander unterscheiden. So stimmen die auf vier Nachkommastellen gerundeten Matrizen  $M^n$  für  $n \geq 30$  mit der folgenden Matrix überein:

$$\begin{pmatrix} 0,2216 & 0,2216 & 0,2216 & 0,2216 \\ 0,2194 & 0,2194 & 0,2194 & 0,2194 \\ 0,2150 & 0,2150 & 0,2150 & 0,2150 \\ 0,3440 & 0,3440 & 0,3440 & 0,3440 \end{pmatrix}$$

Es ergibt sich, dass in jeder Zeile die Zahlen (gerundet) übereinstimmen.

Was kann man daraus für die Chaparral-Vegetation folgern?

- e) In der Praxis führen die Verwalter des Chaparral auch noch ein kontrolliertes, gewolltes Abbrennen von Teilen der Vegetation, die älter als 10 Jahre ist, durch. In unserem Modell nehmen wir zur Vereinfachung an, dass das Abbrennen immer unmittelbar nach Ablauf von 10 Jahren auf einmal stattfindet. Nehmen wir weiter an, dass stets 2 % von Klasse 2, sowie 3 % von Klasse 3 und 7 % von Klasse 4 abbrennen. Dieser Vorgang des gewollten Abbrennens kann ebenfalls durch eine  $4 \times 4$ -Matrix beschrieben werden, in der die oben genannten Prozentzahlen benutzt werden. Stellen Sie diese Matrix  $N$  auf und erklären Sie Ihr Vorgehen. Beschreiben Sie den gesamten zehnjährigen Vorgang des spontanen und gewollten Abbrennens mithilfe der Matrizen  $N$  und  $M$ . Begründen Sie Ihre Antwort.

## Aufgabe 1 Vegetation

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	<p>Es beschreibt <math>v_i</math> den Anteil an der Fläche, die Pflanzen aus Klasse <math>i</math> bedecken, der verbrennt und daher das Wachstum junger Pflanzen begünstigt, also nach 10 Jahren zur Klasse 1 gerechnet wird. Daher stehen diese Zahlen in der 1. Zeile der Matrix, aus der ja die Fläche von Klasse 1 nach 10 Jahren berechnet wird. Nach der Aufgabenstellung beschreibt <math>n_i</math> den Anteil an der Fläche, die Pflanzen aus der Klasse <math>i</math> bedecken, der nicht verbrennt und daher nach 10 Jahren zur Klasse <math>i + 1</math> gehört (<math>i &lt; 4</math>) bzw. in der Klasse 4 verbleibt. Es stehen also <math>n_i</math> für <math>i = 1, 2</math> und <math>3</math> in der Zeile <math>i + 1</math>, mit der die Fläche von der Klasse <math>i + 1</math> berechnet wird. In der vierten Zeile kommt noch <math>n_4</math> hinzu, da dieser Anteil in Klasse 4 verbleibt.</p> <p>Jede Klasse wird unterteilt in zwei Anteile: Der verbrennende Anteil und der nicht verbrennende Anteil. Beide zusammen ergeben <math>100\% = 1</math>.</p> $M = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ n_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 & n_4 \end{pmatrix}$	10	15	
b)	<p>Der nicht verbrannte Anteil von Klasse 1 ergibt den Anteil von Klasse 2:  <math>600 \cdot n_1 = 594</math>, also <math>n_1 = 0,99</math>.</p> <p>Analog für die Klasse 2: <math>400 \cdot n_2 = 392</math>, also <math>n_2 = 0,98</math>.</p> <p>Nach der Definition von <math>v_i</math> und <math>n_i</math> gilt <math>v_i + n_i = 1</math>,  daher ist <math>v_1 = 0,01</math> und <math>v_2 = 0,02</math>.</p>	10	5	
c)	<p>Die Definitionsmenge ist die Menge aller Vektoren mit vier Komponenten, welche die Größe der jeweiligen Klasse zu Beginn der Untersuchung angeben. Die Wertemenge ist die Menge aller Vektoren mit vier Komponenten, welche die Größe der Klasse nach 10 Jahren angeben. Die zugehörigen Werte ergeben sich aus <math>f: \vec{x} \rightarrow f(\vec{x}) = M \cdot \vec{x}</math>.</p> <p><i>Die Funktion kann statt mit der Matrix auch gleich mit vier Termen beschrieben werden, die sich als Vektorkomponenten aus der Multiplikation <math>M \cdot \vec{x}</math> ergeben.</i></p>		10	10
d)	<p>Langfristig streben in diesem Modell die Flächengrößen der einzelnen Klassen jeweils gegen feste Werte. Geht man von der angegebenen Gesamtgröße von <math>2000 \text{ km}^2</math> aus, so ergeben sich die folgenden Größen für Klasse 1: <math>0,2216 \cdot 2000 = 443,2</math>, Klasse 2: <math>0,2194 \cdot 2000 = 438,8</math>, Klasse 3: <math>0,2150 \cdot 2000 = 430,0</math> und Klasse 4: <math>0,3440 \cdot 2000 = 688,0</math>, d.h. <math>443,2 \text{ km}^2</math> des Chaparrals sind mit einer Vegetation bewachsen, die jünger als 10 Jahre alt ist, eine zwischen 10 und 20 Jahre alte Vegetation bedeckt <math>438,8 \text{ km}^2</math>, <math>430,0 \text{ km}^2</math> werden von einer 20 bis 30 Jahre alten Vegetation bedeckt und eine Fläche von <math>688 \text{ km}^2</math> enthält mehr als 30 Jahre alte Pflanzen.</p>		15	

	<b>Lösungsskizze</b>	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
e)	$N = \begin{pmatrix} 1 & 0,02 & 0,03 & 0,07 \\ 0 & 0,98 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,97 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,93 \end{pmatrix}$ <p>Die Prozentanteile für das Abbrennen stehen in der 1. Zeile, wobei <math>n_{11} = 1</math> ist, da von Klasse 1 nicht abgebrannt wird.</p> <p>In den restlichen Zeilen steht der jeweilige Anteil, der nicht abgebrannt wird in der Diagonalen, die zugehörige Klasse verkleinert sich entsprechend.</p> <p>Die Matrix <math>N \cdot M</math> beschreibt den kompletten Vorgang: <math>\vec{y} = M \cdot \vec{x}</math> liefert die Flächenmaße durch spontane Brände, <math>\vec{z} = N \cdot \vec{y}</math> schließlich die sich durch gewolltes Abbrennen ergebenden Flächen. Die Reihenfolge der Matrizen ergibt sich aus dem Aufgabentext.</p>		20	5
	Insgesamt 100 BWE	20	65	15