

### Aufgabe 3 Libellenentwicklung

In dieser Aufgabe sollen die Anzahlen der Individuen in den verschiedenen Entwicklungsstadien einer Libellenart betrachtet werden. Dabei werden folgende Annahmen zu Grunde gelegt.

Eine junge Libelle legt 90 Eier, von denen sich 5 % zu Junglarven weiterentwickeln. 50 % der Junglarven entwickeln sich zu Altlarven (Nymphen), während 5 % der Junglarven das Altlarven-Stadium überspringen und zu jungen Libellen werden. Von den Altlarven entwickeln sich 30 % zu jungen Libellen. 25 % der jungen Libellen überleben eine Generation und legen als alte Libellen immerhin noch 40 Eier, deren Entwicklungsfähigkeit denen der Junglibellen entspricht. Die fehlenden Prozentanteile entsprechen jeweils einem Nichtüberleben dieses Stadiums. Alle alten Libellen sterben in der nächsten Generation.

- a) Geben Sie eine graphische Darstellung dieses Lebenszyklus' an und ermitteln Sie daraus eine Populationsmatrix  $P$ .

$$\text{(Benutzen Sie abkürzend: } \left. \begin{array}{l} A = \text{Anzahl der jungen Libellen} \\ B = \text{Anzahl der alten Libellen} \\ C = \text{Anzahl der Eier} \\ D = \text{Anzahl der Junglarven} \\ E = \text{Anzahl der Altlarven} \end{array} \right\} , \text{ und damit } \vec{v} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{pmatrix}$$

als Populationsvektor.)

- b) In einem Teich sind zu Beginn 25 Junglibellen, 5 Altlibellen, 6000 Eier, 200 Junglarven und 80 Altlarven vorhanden.

Berechnen Sie die Anzahlen der einzelnen Entwicklungsstadien für die nächsten zwei Generationen.

- c) Bestimmen Sie eine Startpopulation, die sich in jeder Generation reproduziert.

Beschreiben Sie das Populationsmodell geeignet als Funktion und interpretieren Sie das eben berechnete Ergebnis (*Startpopulation, die sich in jeder Generation reproduziert*) mithilfe dieser Funktion.

- d) Ermitteln Sie eine Startpopulation, aus der nach einer Generation 11 Junglibellen, 5 Altlibellen, 2000 Eier, 40 Junglarven und 20 Altlarven geworden sind.

Durch einen besonderen Umwelteinfluss werden die Anzahlen der Larven (jung und alt) ad hoc halbiert, während die Eier und die Libellen davon unbeeinflusst bleiben.

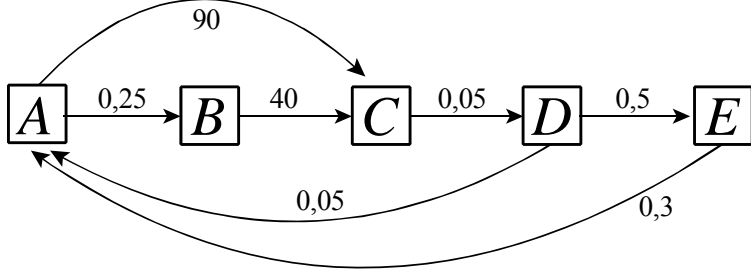
- e) Geben Sie begründet eine Matrix  $H$  an, die die Halbierung der Larvenanzahlen beschreibt.

- f) Dieser besondere Umwelteinfluss tritt periodisch und nur alle 10 Generationen auf.

Beschreiben Sie mit den Matrizen  $P$  und  $H$ , welcher Populationsvektor  $\vec{v}_E$  sich nach 10 Generationen aus einer Anfangspopulation  $\vec{v}_A$  ergibt, wenn die Halbierung der Larven am Ende des Beobachtungszeitraumes auftritt.

Beurteilen Sie, ob das Ergebnis, also der Populationsvektor  $\vec{v}_E$ , davon beeinflusst wird, dass die Halbierung der Larvenanzahlen zu Beginn, in der Mitte oder am Ende eines Beobachtungszeitraumes von 10 Generationen auftritt.

**Aufgabe 3 Libellenentwicklung**

		Lösungsskizze			Zuordnung, Bewertung		
					I	II	III
a)	<p>Mit den Bezeichnungen aus der Aufgabenstellung ergibt sich folgender Graph und folgende Populationsmatrix <math>P</math> des Lebenszyklus:</p>  $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0,05 & 0,3 \\ 0,25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 90 & 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}.$	5	15				
b)	<p>Die Startpopulation wird durch den Vektor <math>\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 25 \\ 5 \\ 6000 \\ 200 \\ 80 \end{pmatrix}</math> beschrieben.</p> <p>Die Anzahlen der ersten Generation berechnen sich durch: <math>\vec{v}_1 = P \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 34 \\ 6,25 \\ 2450 \\ 300 \\ 100 \end{pmatrix}</math>,</p> <p>also zu 34 jungen Libellen, 6 alten Libellen, 2450 Eiern, 300 Junglarven und 100 Altlarven.</p> <p>Die Anzahlen der zweiten Generation berechnen sich durch:</p> $\vec{v}_2 = P \cdot \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 45 \\ 8,5 \\ 3300 \\ 122,5 \\ 150 \end{pmatrix},$ <p>also zu 45 jungen Libellen, 8 alten Libellen, 3300 Eiern, 122 Junglarven und 150 Altlarven.</p> <p>Den Populationsvektor <math>\vec{v}_i</math> der <math>i</math>-ten Generation erhält man allgemein durch: <math>\vec{v}_i = P^i \cdot \vec{v}_0</math>. Dabei kann aber nur das Endergebnis gerundet werden. So ergeben sich bei der Berechnung der 2. Generation mithilfe von <math>P^2</math> 3310 Eier.</p>	15					

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
c)	<p>Für eine sich selbst reproduzierende Population <math>\vec{v}</math> gilt:  <math>P \cdot \vec{v} = \vec{v} \Leftrightarrow (P - E) \cdot \vec{v} = \vec{0}</math>. Das Lösen des LGS ergibt:</p> $\vec{v} = r \cdot \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,1 \\ 40 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 400 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}.$ <p>Um „ganze“ Tiere zu erhalten, muss auf <math>r \in \mathbb{N}^*</math> eingeschränkt werden.</p> <p>Das Populationsmodell beschreibt die Funktion <math>f</math> mit <math>f(\vec{v}_i) = P \cdot \vec{v}_i</math>.</p> <p>Die sich selbst reproduzierenden Populationen sind Fixpunkte von <math>f</math>, genauer die Menge aller Fixpunkte von <math>f</math>, da obiger Ansatz äquivalent zu <math>f(\vec{v}) = \vec{v}</math> ist.</p>		20	5
d)	<p>Gesucht ist der Vektor <math>\vec{x}</math> mit <math>P \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ 2000 \\ 40 \\ 20 \end{pmatrix}</math>. Lösen des LGS ergibt: <math>\vec{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \\ 800 \\ 40 \\ 30 \end{pmatrix}</math>.</p>		10	
e)	<p>Die Matrix <math>H</math> lässt die ersten drei Komponenten des Populationsvektors unverändert und halbiert die letzten beiden Komponenten.</p> $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \text{ denn } H \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ \frac{1}{2}D \\ \frac{1}{2}E \end{pmatrix}.$		10	
f)	<p>Stellt <math>\vec{v}_{E\_normal} = P^{10} \cdot \vec{v}_A</math> die Endpopulation nach 10 Jahren im vorliegenden Modell dar, so ergibt sich <math>\vec{v}_E = H \cdot \vec{v}_{E\_normal}</math>. Dabei werden lediglich die Anzahlen der Jung- und Altlarven halbiert.</p> <p>Es gilt <math>P H \neq H P</math>, denn die erste Zeile der Matrix <math>H P</math> entspricht jener von <math>P</math>, die erste Zeile von <math>P H</math> lautet aber <math>(0 \mid 0 \mid 0 \mid 0,025 \mid 0,15)</math>.</p> <p>Das Endergebnis hängt daher davon ab, wann mit <math>H</math> multipliziert wird, bzw. verändert der Zeitpunkt des besonderen Umwelteinflusses das Ergebnis.</p>		5	15
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20